

HEINRICH-HERTZ-INSTITUT FÜR SCHWINGUNGSFORSCHUNG
BERLIN-CHARLOTTENBURG

Technischer Bericht Nr. 80

Die Änderungen der Biegeeigenschwingungen
von Maschinenwellen infolge kleiner Störungen
der Randbedingungen

von

Dr.-Ing. R. PRIEBS

Berlin
1 9 6 5

H 80

Die Aenderungen der Biegeeigenschwingungen von Maschinenwellen infolge kleiner Störungen der Randbedingungen

Zusammenfassung:

Ausgehend von der Integralgleichung für die Biegeeigenschwingungen von Stäben werden mit Hilfe der Störungsrechnung einfache Beziehungen abgeleitet, die in erster Näherung den Einfluß kleiner Störungen der Randbedingungen zu berechnen gestatten. Unter Randbedingungen sind alle Bedingungen über Auslenkung, Neigung, Moment und Querkraft an diskreten Stellen der Welle zu verstehen. Von besonderem Interesse dürften die Aenderungen sein, die sich beim Uebergang von ursprünglich starren Lagern zu etwas nachgiebigen Lagern ergeben. Das gleiche gilt auch für die Berücksichtigung der Kreiselwirkung von Scheiben. Mit Hilfe der als bekannt vorausgesetzten Eigenwerte und Eigenfunktionen eines ungestörten Falles lassen sich einfache Resultate erzielen. Die Formeln für die Aenderungen der Eigenwerte bzw. der biegekritischen Drehzahlen sind besonders einfach und anschaulich und daher für die Praxis von wesentlichem Interesse. An Hand mehrerer Beispiele wird die Brauchbarkeit des Näherungsverfahrens nachgewiesen.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

Der Bearbeiter

gez. R. Priebs

(Dr.-Ing.R.Priebs)



Der Abteilungsleiter

gez. P. Matthieu

(Prof.Dr.phil.P.Matthieu)

Der Institutsdirektor

gez. G. Rothert

(Prof.Dr.-Ing.G.Rothert)

Berlin-Charlottenburg, den 15. März 1965

Ü B E R B L I C K

Es wird untersucht, wie sich die Biegeeigenschwingungen von Maschinenwellen infolge kleiner Störungen der Randbedingungen in erster Näherung ändern. Unter Randbedingungen verstehen wir hier alle Bedingungen über Auslenkung, Neigung, Moment und Querkraft an diskreten Stellen der Welle. Von besonderem Interesse dürften die Änderungen sein, die sich beim Übergang von ursprünglich starren Lagern zu etwas nachgiebigen Lagern ergeben. Das gleiche gilt auch für den Einfluß der Kreiselwirkung von Scheiben. Eine vollständige Übersicht über alle untersuchten Störungen findet man auf Seite 11. Es zeigt sich, daß unter Zuhilfenahme der vom ungestörten Fall her bekannten Werte und Funktionen einfache und anschauliche Resultate zu erzielen sind. Die Formeln für die Änderungen der Eigenwerte bzw. der biegekritischen Drehzahlen sind besonders einfach und daher sicher von größerem praktischen Interesse. Die Formeln für die Änderungen der Eigenfunktionen dürften sich in vielen Fällen ebenfalls als nützlich erweisen. Mehrere Beispiele am Ende der Arbeit dienen zur Erläuterung.

Das Resultat für die Änderung der Eigenwerte infolge eines etwas nachgiebigen Lagers soll vorweggenommen werden. Es gilt in erster Näherung

$$\Delta \lambda_{\nu} = -h_Q L_{\nu h_Q}^2.$$

Darin bedeutet $\Delta \lambda_{\nu}$ die Änderung des ν -ten Eigenwertes einer beliebigen Maschinenwelle, wenn das Lager an der Stelle l_{ϵ} dieser Welle nicht mehr starr, sondern etwas nachgiebig ist. h_Q ist die Nachgiebigkeit (reziproke Federkonstante) des Lagers und der Wert $L_{\nu h_Q}$ die im starren Lager (ungestörter Fall) auftretende Kraft bei der ν -ten Eigenschwingung, die noch einer bekannten Normierungsvorschrift unterliegt. Im Falle mehrerer nachgiebiger Lager ergibt sich die gesamte Änderung durch Addition der einzelnen Änderungen. Man kann dabei den Einfluß jedes einzelnen Lagers schnell überblicken.

Wenn die Berechnung der starr gelagerten Welle von einem Digitalrechner durchgeführt wird, ist es leicht möglich, die Zahlenwerte für

$$L^2_{\nu h Q}$$

durch ein kurzes Zusatzprogramm berechnen und mit ausdrucken zu lassen. Mit Hilfe eines Rechenstabes kann dann in wenigen Minuten der Einfluß der Lagernachgiebigkeiten auf die Änderung der Eigenwerte bestimmt werden. Dadurch ist in vielen Fällen (wenn nämlich eine erste Näherung ausreicht) ein häufiges Wiederholen von Rechnungen mit dem Digitalrechner vermeidbar.

Ganz analoge Beziehungen ergeben sich für die anderen hier untersuchten Störungen. Die Ergebnisse für alle in Frage kommenden Änderungen der Eigenwerte und Eigenfunktionen sind auf den Seiten 44 und 45 zu Tabellen zusammengefaßt.

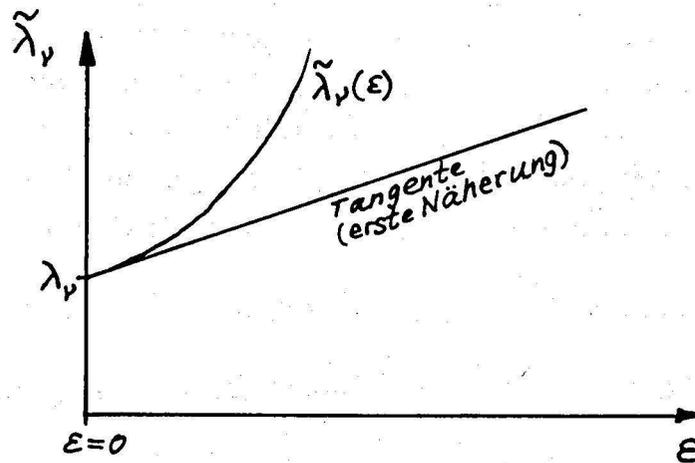


Abb.1: Die Abhängigkeit eines Eigenwertes von einem Störparameter

Durch Abb.1 soll veranschaulicht werden, daß man die Abhängigkeit eines gestörten Eigenwertes $\tilde{\lambda}_\nu$ von einem Störparameter ϵ in erster Näherung durch eine Tangente im Punkte $(\lambda_\nu, \epsilon = 0)$ ersetzt. λ_ν ist der ungestörte Eigenwert (das Quadrat der Eigenkreisfrequenz ω_ν).

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

	Seite
Überblick.....	3
Inhaltsverzeichnis.....	5
Literaturverzeichnis.....	6
Liste der wichtigsten Formelzeichen.....	7
1. Einleitung.....	9
2. Ausgangspunkt Differentialgleichung mit Randbedingungen.....	13
3. Ausgangspunkt Integralgleichung.....	20
3.1 Allgemeines.....	20
3.2 Die wichtigsten Beziehungen für eine allgemeine Berechnung der Störungen.....	24
4. Die Änderungen der Greenschen Funktion.....	29
4.1 Störung durch Querfedern.....	29
4.2 Störung durch Drehfedern.....	30
4.3 Störung durch Nachgiebigkeit von Führungen.....	31
4.4 Störung durch Nachgiebigkeit von Lagern.....	35
5. Die Bedeutung der Integrale $I_{\nu\epsilon}$	38
6. Die Änderungen der Eigenwerte und der Eigenfunktionen.....	40
7. Beispiele.....	49
7.1 Beispiel 1.....	49
7.2 Beispiel 2.....	61
7.3 Beispiel 3.....	70

L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

- [1] C.B. Biezeno Technische Dynamik
R. Grammel 1. Band, Springer-Verlag, 1953
- [2] K. Klotter Technische Schwingungslehre
2. Band, Springer-Verlag, 1960
- [3] I. Szabó Einführung in die Technische Mechanik
Springer-Verlag, 1961
- [4] I. Szabó Höhere Technische Mechanik
Springer-Verlag, 1961
- [5] R. Zurmühl Matrizen
Springer-Verlag, 1961
- [6] E. Madelung Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers
Springer-Verlag, 1957
- [7] M.A. Neumark Lineare Differentialoperatoren
Akademie-Verlag, Berlin 1960
- [8] H. Kandziora Berechnung biegekritischer Drehzahlen mit
Berücksichtigung der Kreiselwirkung
Programmbeschreibung Nr. 23026 vom 13.6.1961
der Firma ZUSE
- [9] H. Kandziora Durchlaufträger auf starren und elastischen
Stützen
Programmbeschreibung Nr. 23023/A vom
22.8.1961 der Firma ZUSE
- [10] W. Holste Freie und erzwungene Schwingungen des
elastisch gelagerten Balkens
Forschung 24 (1958), S. 1-14

LISTE DER WICHTIGSTEN FORMELZEICHEN

<u>Zeichen</u>	<u>B e d e u t u n g</u>	Näheres auf Seite
\sim	Eine Schlange über einem Zeichen bedeutet stets, daß der betreffende Ausdruck gestört ist	10
c_M	Drehsteifigkeit oder Drehfederkonstante	16, 30
c_Q	Quersteifigkeit oder Querfederkonstante	29
E	Elastizitätsmodul	13
$F_\varepsilon(x)$	Störfunktion, die aus statischen Betrachtungen folgt	28, 29
$G(x, \xi)$	Greensche Funktion oder Einflußfunktion infolge einer Einheitskraft	20
$G_M(x, \xi)$	Einflußfunktion infolge eines Einheitsmomentes	30
h_M	Drehnachgiebigkeit (reziproke Drehfederkonstante)	31
h_Q	Quernachgiebigkeit (reziproke Querfederkonstante)	16, 35
$I(x)$	axiales Flächenträgheitsmoment	13
$I_{\nu\varepsilon}$	Abkürzung für bestimmte Integrale	27, 38
$K(x, \xi)$	symmetrischer Kern einer Integralgleichung	22
k	laufender Index: $k = 1, 2, \dots$	22, 25
l	Gesamtlänge einer Maschinenwelle	21
l_ε	Angriffsstelle einer Störung	29ff
L_{cQ}	Störkraft infolge einer Querfeder (bei statischer Belastung)	29
L_{hQ}	Lagerkraft einer ungestörten Maschinenwelle bei statischer Belastung	35
$L_{\nu hQ}$	Amplitude der ungestörten Lagerkraft einer Maschinenwelle bei der ν -ten normierten Eigenschwingung	40
m_{cQ}	Einzelmasse	41
m_{hQ}	zwichengekoppelte Einzelmasse bei einem Lager	41
M_{cM}	Störmoment infolge einer Drehfeder	30
M_{hM}	Moment in der Führung einer ungestörten Maschinenwelle bei statischer Belastung	31
$M_{\nu hM}$	Amplitude des ungestörten Momentes in der Führung einer Maschinenwelle bei der ν -ten normierten Eigenschwingung	39
P	Einzelkraft	20
t	Zeit	13
$w(x, \xi)$	statische Auslenkung einer Maschinenwelle an der Stelle x infolge einer Last an der Stelle ξ	20

<u>Zeichen</u>	<u>B e d e u t u n g</u>	<u>Näheres auf Seite</u>
$w_\nu(x)$	nicht normierte ungestörte ν -te Eigenfunktion	42
x	Ort einer Auslenkung	13
$y(x,t)$	orts- und zeitabhängige Auslenkung	13
$Y_\nu(x)$	normierte ungestörte ν -te Eigenfunktion (in Ziff.2 Normierung nicht notwendig)	13
Δ	Ein Δ vor einem Zeichen bedeutet stets die Abweichung des dahinter stehenden Ausdruckes von seinem ungestörten Wert	10, 24
ε	Störparameter	9, 27
Θ_{cM}	Drehträgheit oder Massenträgheitsmoment	41
λ_ν	Eigenwert der ν -ten Eigenschwingung, $\lambda_\nu = \omega_\nu^2$	16, 22
$\rho(x)$	Massenbelegungsfunktion	13
ν	laufender Index: $\nu = 1, 2, \dots$	14, 22
ξ	Angriffsstelle einer Last	20
$\varphi_\nu(x) = \sqrt{\rho(x)} \cdot Y_\nu(x)$		22
$\Phi_\xi(x) = \sqrt{\rho(x)} F_\xi(x)$		27
ω_ν	Eigenfrequenz der ν -ten Eigenschwingung	13

1. EINLEITUNG

Wenn man Störungsrechnung betreibt, hat man es stets mit einem ungestörten und einem gestörten Problem zu tun. Das gestörte Problem weicht dabei in der Regel nur wenig vom ungestörten ab. Die Lösung des ungestörten Problems wird als bekannt vorausgesetzt. Das gestörte Problem ist also gelöst, wenn die Abweichungen durch Funktionen und Werte des ungestörten Problems und gegebene Störparameter ausgedrückt werden können. Dies ist hier der Fall.- Das ungestörte Problem besteht in der Ermittlung der Biegeeigenschwingungen, also insbesondere auch der Biegeeigenfrequenzen (biegekritischen Drehzahlen) mehrfach gelagerter Maschinenwellen. Die behandelten Störungen sind auf Seite 11 zusammengestellt.

Die Ursprünge der Störungsrechnung kommen aus der Astronomie. Die mathematische Fundierung geht auf den französischen Mathematiker Poincaré (1854-1912) zurück. Heute wird die Störungsrechnung bei den verschiedensten wissenschaftlichen und technischen Problemen angewandt. Die Methode könnte auch "Entwicklung nach Potenzen eines kleinen Parameters" heißen. Es sei z.B. $y_0(x)$ die bekannte Lösung eines Problems, das durch eine Differentialgleichung und die erforderlichen Randbedingungen charakterisiert ist. Tritt in der Differentialgleichung oder in den Randbedingungen eine durch einen Störparameter ε gekennzeichnete Störung auf, so setzt man die Lösung $\tilde{y}(x)$ dieses nunmehr gestörten Problems im Sinne der Störungsrechnung wie folgt an:

$$\tilde{y}(x) = y_0(x) + \varepsilon y^{(1)}(x) + \varepsilon^2 y^{(2)}(x) + \dots \quad (1.1)$$

Man "entwickelt" nach Potenzen des Störparameters. Die Funktionen $y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \dots$ sind darin noch unbekannt; sie müssen auf Grund geeigneter Zusatzbedingungen bestimmt werden. Die Reihe muß natürlich konvergieren. Wenn ε genügend klein ist, wird man im allgemeinen mit wenigen Gliedern auskommen.

Treten statt eines Störparameters mehrere, z.B. zwei Störparameter, ε_1 und ε_2 , auf, so tritt an die Stelle von (1.1) der Ansatz

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) = & y_0(x) + \varepsilon_1 y^{(10)}(x) + \varepsilon_2 y^{(01)}(x) \\ & + \varepsilon_1^2 y^{(20)}(x) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 y^{(11)}(x) + \varepsilon_2^2 y^{(02)}(x) \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

Sieht man die Größe des Störparameters ε als klein an, so darf man in erster Näherung die höheren Potenzen vernachlässigen, macht also den in ε linearen Näherungsansatz

$$\tilde{y}(x) = y_0(x) + \varepsilon_1 y_{\varepsilon_1}(x) + \varepsilon_2 y_{\varepsilon_2}(x) + \dots + \varepsilon_n y_{\varepsilon_n}(x), \quad (1.3)$$

worin jetzt die zu den Störparametern $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ gehörenden Funktionen der übersichtlicheren Schreibweise wegen mit $y_{\varepsilon_1}(x), y_{\varepsilon_2}(x), \dots, y_{\varepsilon_n}(x)$ bezeichnet sind.- In diesem Sinne wollen wir unser Problem behandeln. Da es sich um ein Eigenwertproblem handelt, werden sich sowohl die Eigenwerte λ_ν als auch die Eigenfunktionen $Y_\nu(x)$ ($\nu = 1, 2, \dots$) um die Werte $\Delta\lambda_\nu$ bzw. um die Funktionen $\Delta Y_\nu(x)$ ändern. Im Sinne von (1.3) setzen wir für diese Änderungen an

$$\Delta\lambda_\nu = \varepsilon_1 \lambda_{\nu\varepsilon_1} + \varepsilon_2 \lambda_{\nu\varepsilon_2} + \dots + \varepsilon_n \lambda_{\nu\varepsilon_n}, \quad (2.1)$$

$$\Delta Y_\nu(x) = \varepsilon_1 Y_{\nu\varepsilon_1}(x) + \varepsilon_2 Y_{\nu\varepsilon_2}(x) + \dots + \varepsilon_n Y_{\nu\varepsilon_n}(x). \quad (2.2)$$

Außerdem benutzen wir eine Schlange (\sim) als Kurzkennzeichnung für die gestörten Ausdrücke und zur leichten Unterscheidung von den ungestörten Ausdrücken λ_ν und $Y_\nu(x)$:

$$\tilde{\lambda}_\nu = \lambda_\nu + \Delta\lambda_\nu, \quad (3.1)$$

$$\tilde{Y}_\nu(x) = Y_\nu(x) + \Delta Y_\nu(x). \quad (3.2)$$

Gegenstand unserer Untersuchungen ist eine in beliebiger Weise abgesetzte Maschinenwelle, die an beliebig vielen Stellen gelagert oder geführt und irgendwie mit Einzelmassen und Einzelscheiben besetzt sein kann (Abb.2)

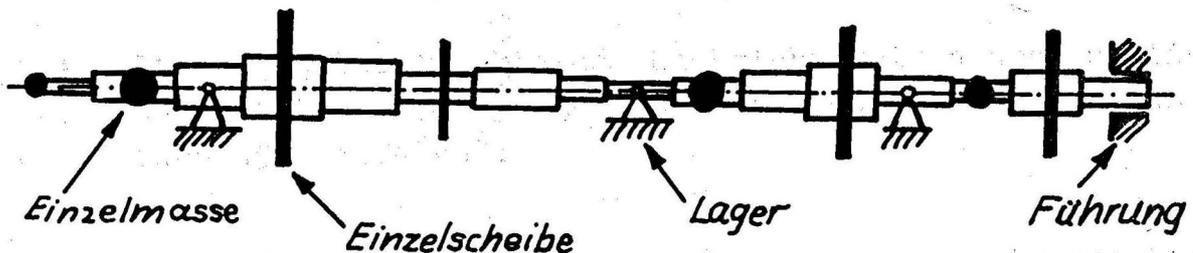


Abb.2: Beispiel für eine beliebige Maschinenwelle

Die Untersuchungen gelten den Änderungen der Eigenwerte und der Eigenfunktionen solcher Maschinenwellen, wenn Störungen auftreten, die in Tabelle 1 zusammengestellt sind. In dieser Zusammenstellung wurden die Störungen in vier Gruppen eingeteilt. Diese Einteilung erweist sich im weiteren Verlauf der Arbeit als zweckmäßig: Die in den Gruppen 1, 2, 3 und 4 aufgeführten Störungen hängen nämlich in erster Näherung jeweils von der Auslenkung, der Neigung, dem Momentensprung und dem Querkraftsprung an den zugehörigen Stellen der ungestörten Maschinenwelle ab.

T a b e l l e 1

Zusammenstellung aller untersuchten Störungen

- Gruppe 1: Störungen durch kleine querelastische Federn zwischen Welle und Fundament oder durch geringe Änderungen der Federkonstanten von bereits vorhandenen Querfedern. Ferner Störungen infolge des Hinzukommens kleiner Einzelmassen oder infolge kleiner Änderungen von Einzelmassen.
- Gruppe 2: Störungen durch kleine drehelastische Federn zwischen Welle und Fundament oder durch geringe Änderungen der Federkonstanten von bereits vorhandenen Drehfedern. Ferner Störungen infolge neuen Hinzutretens kleiner Massenträgheitsmomente sowie Störungen infolge Berücksichtigung von Kreiselwirkungen oder infolge kleiner Änderungen bereits vorhandener Massenträgheitsmomente bzw. Kreiselwirkungen.
- Gruppe 3: Störungen infolge kleiner Nachgiebigkeiten ursprünglich starrer Führungen.
- Gruppe 4: Störungen infolge kleiner Nachgiebigkeiten ursprünglich starrer Lager, Störungen durch zwischengekoppelte Massen (Abb. 19, Seite 41).

Charakteristisch für alle Störungen ist, daß sie an diskreten Stellen der Welle auftreten, also nicht über ein Stück der Wellenlänge verteilt sind.

Das Problem kann, ausgehend von der zugehörigen Differentialgleichung einschließlich der Randbedingungen oder ausgehend von der zugehörigen Integralgleichung, behandelt werden. Der Weg über die Integralgleichung erweist sich als weitaus besser geeignet. Zur Einführung wird jedoch zunächst unter Ziff.2 an Hand eines Beispiels der erste Weg verfolgt.

Aus Abb.3 geht die Vorzeichenfestlegung hervor; die Pfeile kennzeichnen die positiven Richtungen. Wir betrachten die Biegeeigenschwingungen in der durch das skizzierte Koordinatensystem festgelegten Ebene.

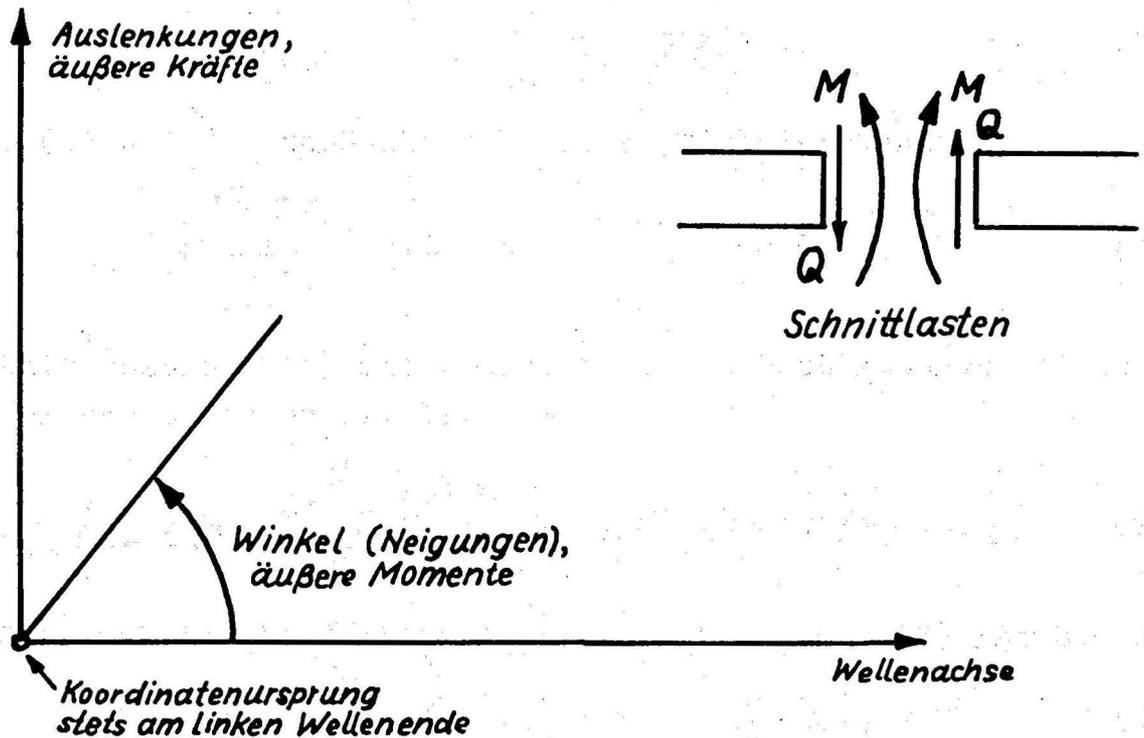


Abb.3: Zur Vorzeichenfestlegung

Die für die Biegeeigenschwingungen gültigen Formeln unterscheiden sich bekanntlich, vgl. [2], nur dann von den für die bei der Rotation der Welle möglichen kritischen Auslenkformen und Frequenzen (biegekritischen Drehzahlen), wenn Drehmassen Θ auftreten. Es ist dann die Kreiselwirkung dieser Scheiben zu berücksichtigen. Wir gehen in dieser Arbeit nur auf den meist interessierenden Fall der Kreiselwirkung im Gleichlauf ein.

2. AUSGANGSPUNKT DIFFERENTIALGLEICHUNG MIT RANDBEDINGUNGEN

Den Untersuchungen über die freien Schwingungen von Maschinenwellen liegt im allgemeinen die partielle Differentialgleichung (4) zu Grunde:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right) = -\mu(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Hierin bedeuten $y(x,t)$ die orts- und zeitabhängige Auslenkung der Welle, E deren Elastizitätsmodul, $I(x)$ den Verlauf des axialen Flächenträgheitsmomentes und $\mu(x)$ die Massenverteilung je Längeneinheit der Welle. Der Produktansatz

$$y(x,t) = Y(x) \cdot T(t) \quad (5)$$

führt mit (4) auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (6)$$

für die Zeitfunktion $T(t)$ mit zunächst noch unbestimmtem ω und auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right) - \omega^2 \mu(x) Y(x) = 0 \quad (7)$$

für die Ortsfunktion $Y(x)$. Die allgemeine Lösung von (6) ist bekanntlich

$$T(t) = A_T \sin \omega t + B_T \cos \omega t \quad (8)$$

mit den frei wählbaren Konstanten A_T und B_T und der hier als Kreisfrequenz erkennbaren Konstanten ω . Die allgemeine Lösung von (7) für beliebige $I(x)$ und $\mu(x)$ kann man nicht in geschlossener Form angeben. Bei einer Maschinenwelle sind diese beiden Funktionen jedoch stückweise konstant. Für ein solches Stück der Welle, in dem sich weder $I(x)$ noch $\mu(x)$ ändern, gilt dann mit (7) die Differentialgleichung

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - \omega^2 \frac{\mu}{EI} Y(x) = 0. \quad (9)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung in Verbindung mit den Randbedingungen führt bekanntlich auf unendlich viele Eigenfrequenzen ω_ν ($\nu = 1, 2, \dots, \infty$) mit den zugehörigen Eigenfunktionen $Y_\nu(x)$, die unter Benutzung der Abkürzung

$$\kappa_\nu^4 = \omega_\nu^2 \frac{\mu}{EI} \quad (10)$$

in der Form

$$Y_\nu(x) = A_0 \sin \kappa_\nu x + B_0 \cos \kappa_\nu x + C_0 \sin \kappa_\nu x + D_0 \cos \kappa_\nu x \quad (11)$$

angegeben werden können. Die Konstanten A_0 , B_0 , C_0 und D_0 erhält man bis auf einen gemeinsamen Faktor aus den Bedingungen (Randbedingungen) für Auslenkung, Neigung, Moment und Querkraft an den Enden des Wellenstückes. Sie ergeben sich in Abhängigkeit von den bekannten Randbedingungen an den Enden der Maschinenwelle. Eine Durchführung der Rechnung von Hand ist wegen des großen Aufwandes im allgemeinen nicht möglich. Die Ermittlung der Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen einer Maschinenwelle wird daher meist mit Hilfe der Verfahren mit Übertragungsmatrizen [2] auf digitalen Rechenautomaten durchgeführt. Für die Berechnung von Störungen stehen die ungestörten Funktionen also meistens nur punktweise zur Verfügung.

Das nun folgende Beispiel kann mühelos von Hand erledigt werden: Es handelt sich im ungestörten Falle um einen an den Enden gelenkig gelagerten Stab mit konstantem E , I und μ (Abb.4).

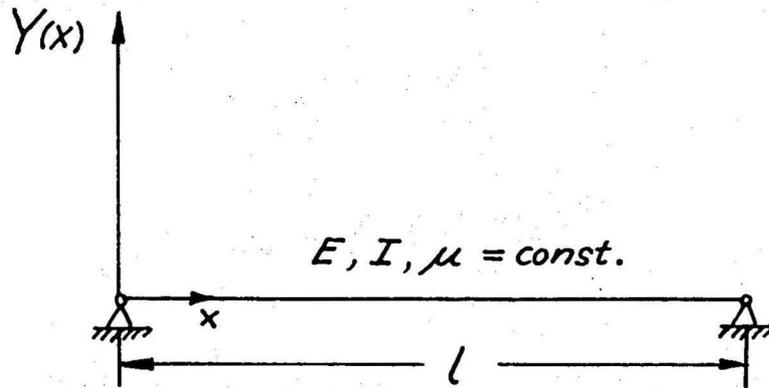


Abb.4: Ungestörter Fall

Auslenkung und Moment an den Enden des Stabes müssen verschwinden; man erhält aus diesen Randbedingungen das homogene Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} Y_\nu(0) &= 0, \\ Y_\nu''(0) &= 0, \\ Y_\nu(l) &= 0, \\ Y_\nu''(l) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

Die beiden hochgestellten Striche dienen in üblicher Weise zur Kurz- kennzeichnung der zweiten Ableitung. Aus (12.1) ergeben sich die Eigenfunktionen

$$Y_\nu(x) = A_0 \sin \kappa_\nu x \quad (12.2)$$

und die Eigenwertgleichung

$$\sin \kappa_\nu l = 0 \quad (12.3)$$

mit den zugehörigen Eigenwerten

$$\kappa_\nu l = \nu \pi \quad (\nu = 1, 2, \dots, \infty). \quad (12.4)$$

Aus (10) folgen mit (12.4) die Eigenkreisfrequenzen zu

$$\omega_\nu = \kappa_\nu^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \quad (12.5)$$

$$\omega_\nu = \left(\frac{\nu\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}}. \quad (12.6)$$

Im gestörten Fall sollen die Lager kleine Quernachgiebigkeiten h_{Q1} und h_{Q2} und kleine Drehelastizitäten c_{M1} und c_{M2} besitzen (Abb.5).

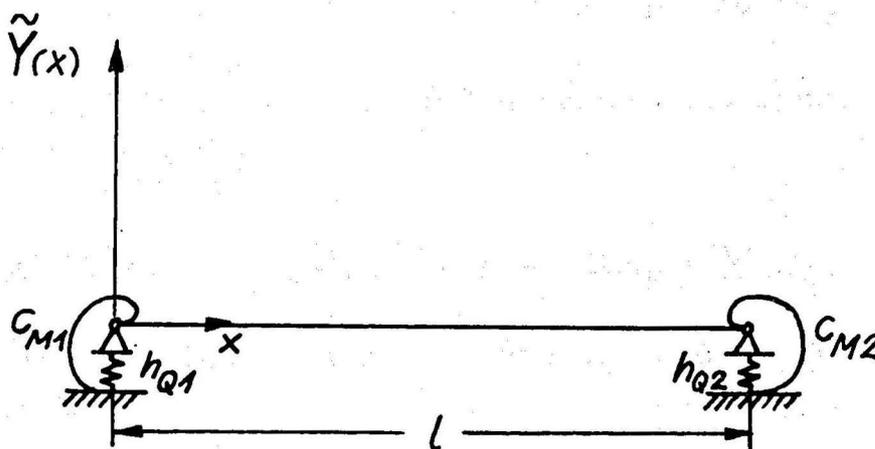


Abb.5: Gestörter Fall

Für den ungestörten Fall gelten die Randbedingungen (12.1) und die Differentialgleichung (9). Nach Einführung der Abkürzungen

$$\lambda_\nu = \omega_\nu^2 \quad (13)$$

und

$$\alpha = \frac{\mu}{EI}, \quad (14)$$

mit denen man statt (10) auch

$$\kappa_\nu^4 = \lambda_\nu \alpha \quad (15)$$

schreiben kann, lautet die ungestörte Differentialgleichung (9) für die ν -te Eigenschwingung

$$Y_p''''(x) - \lambda_p \alpha Y_p(x) = 0. \quad (16.1)$$

Für den gestörten Fall gilt dann, vgl. (3.1) und (3.2),

$$\tilde{Y}_p''''(x) - \tilde{\lambda}_p \alpha \tilde{Y}_p(x) = 0, \quad (16.2)$$

$$(Y_p(x) + \Delta Y_p(x))'''' - (\lambda_p + \Delta \lambda_p) \alpha (Y_p(x) + \Delta Y_p(x)) = 0, \quad (16.3)$$

$$Y_p''''(x) + \Delta Y_p''''(x) - \alpha [\lambda_p Y_p(x) + \lambda_p \Delta Y_p(x) + \Delta \lambda_p \Delta Y_p(x)] = 0. \quad (16.4)$$

Indem wir von 2. Ordnung kleine Größen vernachlässigen, erhalten wir unter Beachtung von (16.1)

$$\Delta Y_p''''(x) - \lambda_p \alpha \Delta Y_p(x) = \Delta \lambda_p \alpha Y_p(x). \quad (16.5)$$

Wenn wir in diese Gleichung die bekannte ungestörte Funktion (12.2) einsetzen, kommt

$$\Delta Y_p''''(x) - \lambda_p \alpha \Delta Y_p(x) = \Delta \lambda_p A_0 \sin \kappa_p x. \quad (16.6)$$

Dies ist eine inhomogene Differentialgleichung für die gesuchte Änderung der Eigenfunktion $\Delta Y_p(x)$, in der außerdem noch die Änderung des Eigenwertes $\Delta \lambda_p$ auftritt. Die homogene Lösung kann man sofort angeben:

$$\Delta Y_{p, hom}(x) = A \sin \kappa_p x + B \cos \kappa_p x + C \sin \kappa_p x + D \cos \kappa_p x. \quad (16.7)$$

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung kann z.B. mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten ermittelt werden. Hier erkennt

man leicht

$$\Delta Y_{\nu inh}(x) = B^* x \cos k_{\nu} x. \quad (16.8)$$

Die Konstante B^* folgt nach Einsetzen von (16.8) in (16.6) zu

$$B^* = \Delta \lambda_{\nu} \frac{\alpha}{4 k_{\nu}^3} A_0. \quad (16.9)$$

Damit folgt für die gesuchte Änderung der Eigenfunktion

$$\begin{aligned} \Delta Y_{\nu}(x) = & A \sin k_{\nu} x + B \cos k_{\nu} x + C \sin k_{\nu} x \\ & + D \cos k_{\nu} x + \Delta \lambda_{\nu} \frac{\alpha}{4 k_{\nu}^3} A_0 x \cos k_{\nu} x. \end{aligned} \quad (16.10)$$

Unbekannt sind noch die Konstanten A, B, C, D und $\Delta \lambda_{\nu}$. Sie müssen sich aus den gestörten Randbedingungen berechnen lassen. Diese sind

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Y}_{\nu}(0) &= -h_{Q1} EI \tilde{Y}_{\nu}'''(0), \\ EI \tilde{Y}_{\nu}''(0) &= c_{M1} \tilde{Y}_{\nu}'(0), \\ \tilde{Y}_{\nu}(l) &= h_{Q2} EI \tilde{Y}_{\nu}'''(l), \\ EI \tilde{Y}_{\nu}''(l) &= -c_{M2} \tilde{Y}_{\nu}'(l). \end{aligned} \right\} \quad (16.11)$$

Unter Berücksichtigung von (12.1) folgt aus (16.11) mit (3.1) und (3.2) in erster Näherung

$$\left. \begin{aligned} \Delta Y_{\nu}(0) &= -h_{Q1} EI Y_{\nu}'''(0), \\ \Delta Y_{\nu}''(0) &= c_{M1} \frac{1}{EI} Y_{\nu}'(0), \\ \Delta Y_{\nu}(l) &= h_{Q2} EI Y_{\nu}'''(0), \\ \Delta Y_{\nu}''(l) &= -c_{M2} \frac{1}{EI} Y_{\nu}'(0). \end{aligned} \right\} \quad (16.12)$$

Da der Anteil $A \sin \kappa_\nu x$ der Funktion $\Delta Y_\nu(x)$ die Bedingungen (12.1) erfüllt, tritt die Konstante A in den Gleichungen (16.12) nicht auf; d.h. A hängt nicht von den Störparametern h_{Q1} , h_{Q2} , c_{M1} und c_{M2} ab. Wenn die Störparameter zu Null werden, muß aber die ganze Störfunktion $\Delta Y_\nu(x)$ verschwinden. Daher muß stets

$$A = 0 \quad (16.13)$$

gelten. Die vier Gleichungen (16.12) sind somit die Bestimmungsgleichungen für die vier Unbekannten B , C , D und $\Delta \lambda_\nu$. Es ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{A_0}{2} \left[EI \kappa_\nu^3 h_{Q1} - \frac{1}{EI \kappa_\nu} c_{M1} \right], \\ C &= - \frac{A_0}{2 \gamma \sin \nu \pi} \left[EI \kappa_\nu^3 (h_{Q1} \cos \nu \pi + h_{Q2} \cos \nu \pi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2EI \kappa_\nu} (c_{M1} \cos \nu \pi + c_{M2} \cos \nu \pi) \right], \\ D &= \frac{A_0}{2} \left[EI \kappa_\nu^3 h_{Q1} + \frac{1}{EI \kappa_\nu} c_{M1} \right], \\ \Delta \lambda_\nu &= \frac{2 \kappa_\nu^3}{\alpha l} \left[-EI \kappa_\nu^3 (h_{Q1} + h_{Q2}) + \frac{1}{EI \kappa_\nu} (c_{M1} + c_{M2}) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (16.14)$$

Damit sind die Änderungen der Eigenfunktionen $\Delta Y_\nu(x)$ und die Änderungen der Eigenwerte $\Delta \lambda_\nu$ in Abhängigkeit von den vier Störparametern h_{Q1} , h_{Q2} , c_{M1} und c_{M2} in erster Näherung gefunden. Wir kommen in Ziff. 8.1 auf dieses Beispiel noch zurück.

3. AUSGANGSPUNKT INTEGRALGLEICHUNG

3.1 Allgemeines

Bei der Herleitung der Integralgleichung geht man von der statischen Durchsenkung einer Maschinenwelle an der Stelle x infolge einer Last P an der Stelle ξ aus (Abb.6). Diese Funktion $w(x, \xi)$ ist proportional der Last P :

$$w(x, \xi) = P G(x, \xi). \quad (17)$$

Die Funktion $G(x, \xi)$, also die Durchsenkung unter der Einheitslast, heißt bekanntlich Greensche Funktion oder Einflußfunktion. Sie hat die bekannte Symmetrieeigenschaft

$$G(x, \xi) = G(\xi, x). \quad (18)$$

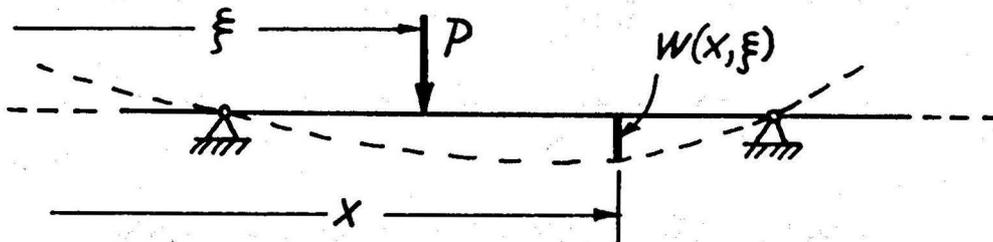


Abb.6: Zur Herleitung der Integralgleichung

Greifen zwei Kräfte P_1 und P_2 an den festen Stellen ξ_1 und ξ_2 an, so erhält man die Auslenkung durch Überlagerung der Einzelauslenkungen:

$$w(x) = P_1 G(x, \xi_1) + P_2 G(x, \xi_2). \quad (19.1)$$

Greifen endlich viele Kräfte P_r an den Stellen ξ_r ($r = 1, 2, \dots, s$) an, so wird die Auslenkung

$$w(x) = \sum_{r=1}^s P_r G(x, \xi_r). \quad (19.2)$$

Ist die Welle einer stetigen Belastung mit der Lastdichte $p(\xi)$ ausgesetzt, so wird aus der Summe ein Integral über die ganze Wellenlänge l :

$$w(x) = \int_0^l p(\xi) G(x, \xi) d\xi. \quad (19.3)$$

Bei freien Schwingungen der Welle ist diese Belastung durch die D'Alembertsche Trägheitskraftverteilung zu ersetzen:

$$p(\xi) \rightarrow -\mu(\xi) \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial t^2}. \quad (19.4)$$

An die Stelle der statischen Auslenkung tritt die orts- und zeitabhängige Auslenkung $y(x, t)$:

$$w(x) \rightarrow y(x, t). \quad (19.5)$$

(19.3) geht somit über in die Integro-Differentialgleichung

$$y(x, t) = - \int_0^l \mu(\xi) \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial t^2} G(x, \xi) d\xi, \quad (19.6)$$

aus der man mit Hilfe des Produktansatzes (5) und mit (8) die Integralgleichung

$$Y(x) = \lambda \int_0^l \mu(\xi) Y(\xi) G(x, \xi) d\xi \quad (19.7)$$

für die Ortsfunktion $Y(x)$ erhält. Diese Gleichung gilt auch, wenn außer der stetigen "Massenverteilung" $\mu(\xi)$ auch Einzelmassen vorkommen. Man hat dann die Integrale im Stieltjeschen Sinne aufzufassen (vgl. [1], S.163). Die Integralgleichung (19.7) entspricht der Differentialgleichung (7) mit den zugehörigen Randbedingungen. Bei einer Maschinenwelle gehört zu jedem Abschnitt mit konstantem μ und I je eine Differentialgleichung. Außerdem ist die Angabe der Randbedingungen (= Übergangsbedingungen) für jedes Wellenstück erforderlich. - Demgegenüber genügt eine einzige Integralgleichung zur Beschreibung einer Eigenschwingung; die Randbedingungen sind bereits in der Greenschen Funktion enthalten. Das erweist sich für die Durchführung unserer Störungsrechnung als sehr vorteilhaft.

Für die ν -te Eigenfunktion gilt

$$Y_\nu(x) = \lambda_\nu \int_0^l \mu(\xi) Y_\nu(\xi) G(x, \xi) d\xi. \quad (20.1)$$

Um auf diese Integralgleichung die Theorie für Integralgleichungen mit symmetrischen Kernen anwenden zu können, setzt man

$$Y_\nu(x) = \frac{\varphi_\nu(x)}{\sqrt{\mu(x)}} \quad (20.2)$$

und erhält somit die Integralgleichung

$$\varphi_\nu(x) = \lambda_\nu \int_0^l \varphi_\nu(\xi) K(x, \xi) d\xi \quad (20.3)$$

mit dem symmetrischen Kern

$$K(x, \xi) = \sqrt{\mu(x)\mu(\xi)} \cdot G(x, \xi). \quad (20.4)$$

Die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ werden als Eigenfunktionen von (20.3) bezeichnet. Sie erfüllen wegen der Symmetrie von $K(x, \xi)$ die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_0^l \varphi_\nu(x) \varphi_\kappa(x) dx = 0 \quad \text{für } \lambda_\nu \neq \lambda_\kappa. \quad (20.5)$$

Um die Eigenfunktionen vergleichen zu können und aus rechentechnischen Gründen ist es zweckmäßig, alle Eigenfunktionen der gleichen Normierungsbedingung zu unterwerfen. Wir normieren die Eigenfunktionen in üblicher Weise gemäß

$$\int_0^l \varphi_\nu^2(x) dx = 1, \quad \nu = 1, 2, \dots, \infty.$$

Damit und mit (20.5) gilt dann

$$\int_0^l \varphi_\nu(x) \varphi_\kappa(x) dx = \delta_{\nu\kappa} = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \kappa \\ 1 & \text{" } \nu = \kappa. \end{cases}$$

(20.6)

Ferner gilt der Entwicklungssatz: Jede Funktion $\varphi(x)$, welche die (für die Eigenfunktionen und die Greensche Funktion gültigen) Randbedingungen erfüllt (und gewissen, praktisch stets zutreffenden Stetigkeitsforderungen genügt), kann in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen entwickelt werden (vgl. [1]):

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (20.7)$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$c_k = \int_0^l \varphi(x) \varphi_k(x) dx. \quad (20.8)$$

Mit (20.2) erhält man für die ursprünglichen Eigenfunktionen $Y_\nu(x)$ die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_0^l \mu(x) Y_\nu(x) Y_k(x) dx = 0 \quad \text{für } \nu \neq k \quad (20.9)$$

und die Normierungsbedingung

$$\int_0^l \mu(x) Y_\nu^2(x) dx = 1. \quad (20.10)$$

3.2 Die wichtigsten Beziehungen für eine allgemeine Berechnung der Störungen

Wir gehen von der Integralgleichung (20.3) aus, die für einen ungestörten Fall gelten möge. Die Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$, den Kern $K(x, \xi)$ und die Eigenwerte λ_ν setzen wir also als bekannt voraus. Im gestörten Fall schreiben wir dann in bekannter Weise

$$\tilde{\varphi}_\nu(x) = \tilde{\lambda}_\nu \int_0^l \tilde{\varphi}_\nu(\xi) \tilde{K}(x, \xi) d\xi \quad (21.1)$$

und setzen

$$\tilde{\varphi}_\nu(x) = \varphi_\nu(x) + \Delta\varphi_\nu(x), \quad (21.2)$$

$$\tilde{\lambda}_\nu = \lambda_\nu + \Delta\lambda_\nu. \quad (21.3)$$

Wenn die Randbedingungen gestört sind, wird sich auch der Kern ändern:

$$\tilde{K}(x, \xi) = K(x, \xi) + \Delta K(x, \xi). \quad (21.4)$$

(21.2) bis (21.4) in (21.1) eingesetzt, ergibt

$$\varphi_\nu(x) + \Delta\varphi_\nu(x) = (\lambda_\nu + \Delta\lambda_\nu) \int_0^l [\varphi_\nu(\xi) + \Delta\varphi_\nu(\xi)] [K(x, \xi) + \Delta K(x, \xi)] d\xi. \quad (21.5)$$

Daraus folgt unter Verwendung von (20.3) und Vernachlässigen aller von 2. Ordnung kleinen Glieder

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_\nu(x) &= \frac{\Delta\lambda_\nu}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(x) \\ &+ \lambda_\nu \int_0^l \Delta\varphi_\nu(\xi) K(x, \xi) d\xi \\ &+ \lambda_\nu \int_0^l \varphi_\nu(\xi) \Delta K(x, \xi) d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (21.6)$$

Wir entwickeln nun $\Delta \varphi_\nu(x)$ und $\Delta K(x, \xi)$ nach den Eigenfunktionen $\varphi_\kappa(x)$ bis auf gegebenenfalls einen, die ungestörten Randbedingungen nicht befriedigenden (quellenmäßig nicht darstellbaren) Anteil:

1. Entwicklung:

$$\Delta \varphi_\nu(x) = \sum_K c_{K\nu} \varphi_K(x) + \psi(x). \quad (21.7)$$

2. Entwicklung:

$$\lambda_\nu \int_0^l \varphi_\nu(\xi) \Delta K(x, \xi) d\xi = \sum_K b_{K\nu} \varphi_K(x) + \chi(x). \quad (21.8)$$

Dabei gilt

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \psi(x) \varphi_K(x) dx &= 0 \quad \text{für alle } K \\ \int_0^l \chi(x) \varphi_K(x) dx &= 0 \quad \text{für alle } K. \end{aligned} \right\} \quad (21.9)$$

Einsetzen in (21.6) ergibt

$$\left. \begin{aligned} \sum_K c_{K\nu} \varphi_K(x) + \psi(x) &= \frac{\Delta \lambda_\nu}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(x) \\ &+ \lambda_\nu \sum_K \frac{c_{K\nu}}{\lambda_K} \varphi_K(x) \\ &+ \lambda_\nu \int_0^l \varphi_\nu(\xi) \Delta K(x, \xi) d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (21.10)$$

Skalar-Multiplikation mit $\varphi_\nu(x)$ liefert

$$\begin{aligned} c_{\nu\nu} &= \frac{\Delta \lambda_\nu}{\lambda_\nu} + c_{\nu\nu} + b_{\nu\nu}, \\ b_{\nu\nu} &= - \frac{\Delta \lambda_\nu}{\lambda_\nu}. \end{aligned} \quad (22.1)$$

Skalar-Multiplikation mit $\varphi_k(x)$ liefert

$$c_{k\nu} = \frac{\lambda_\nu}{\lambda_k} c_{k\nu} + b_{k\nu},$$

$$c_{k\nu} = \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_\nu} b_{k\nu} \quad \text{für } k \neq \nu. \quad (22.2)$$

Der bisher frei wählbare Entwicklungskoeffizient $c_{\nu\nu}$ folgt aus der naheliegenden Forderung, daß die gestörte und die ungestörte Funktion der gleichen Normierungsvorschrift (20.6) unterliegen sollen:

$$\int_0^l \tilde{\varphi}_\nu^2(x) dx = 1,$$

$$\int_0^l \varphi_\nu^2(x) dx + 2 \int_0^l \varphi_\nu(x) \Delta \varphi_\nu(x) dx + \int_0^l \Delta \varphi_\nu^2(x) dx = 1;$$

nach Vernachlässigung des quadratisch kleinen Gliedes kommt

$$\int_0^l \varphi_\nu(x) \Delta \varphi_\nu(x) dx = 0,$$

$$\int_0^l \varphi_\nu(x) \left(\sum_k c_{k\nu} \varphi_k(x) \right) dx = 0,$$

$$\int_0^l c_{\nu\nu} \varphi_\nu^2(x) dx = 0,$$

$$c_{\nu\nu} = 0. \quad (22.3)$$

Unter Verwendung von (21.7) und (22.2) können wir jetzt an Stelle von (21.6) für die Änderung der Eigenfunktion schreiben

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi_\nu(x) &= \frac{\Delta \lambda_\nu}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(x) \\ &+ \lambda_\nu \sum_{k \neq \nu} \frac{b_{k\nu}}{\lambda_k - \lambda_\nu} \varphi_k(x) \\ &+ \lambda_\nu \int_0^l \varphi_\nu(\xi) \Delta K(x, \xi) d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (23.1)$$

Aus (21.8) folgt nach Skalar-Multiplikation mit $\varphi_k(x)$

$$b_{k\nu} = \lambda_\nu \int_0^l \varphi_k(x) \left[\int_0^l \varphi_\nu(\xi) \Delta K(x, \xi) d\xi \right] dx. \quad (23.2)$$

Nach (22.1) ist

$$\Delta \lambda_\nu = - \lambda_\nu b_{\nu\nu}. \quad (23.3)$$

Man erkennt, daß sich die Änderung des Eigenwertes und die Änderung der Eigenfunktion durch die Änderung des Kerns ausdrücken lassen.

Es wird sich zeigen, vgl. (27.1,2), daß für die hier betrachteten Störfälle gilt

$$\Delta K(x, \xi) = - \varepsilon \Phi_\varepsilon(x) \Phi_\varepsilon(\xi) \quad (24.1)$$

mit einem Störparameter ε und einer vom Störparameter abhängigen "Störfunktion" $\Phi_\varepsilon(x)$. Damit erhält man für die Entwicklungskoeffizienten $b_{k\nu}$ aus (23.2)

$$b_{k\nu} = - \varepsilon \lambda_\nu \int_0^l \varphi_k(x) \Phi_\varepsilon(x) dx \cdot \int_0^l \varphi_\nu(\xi) \Phi_\varepsilon(\xi) d\xi \quad (24.2)$$

oder mit der Abkürzung

$$I_{\nu\varepsilon} = \lambda_\nu \int_0^l \varphi_\nu(x) \Phi_\varepsilon(x) dx \quad (24.3)$$

endgültig

$$b_{k\nu} = - \varepsilon \frac{1}{\lambda_k} I_{k\varepsilon} I_{\nu\varepsilon}. \quad (24.4)$$

Aus (23.3) folgt damit

$$\Delta \lambda_\nu = \varepsilon I_{\nu\varepsilon}^2. \quad (24.5)$$

In Ziff. 5 wird gezeigt, daß sich die Integrale (24.3) einfach mechanisch deuten und aus der ungestörten Durchrechnung unmittelbar entnehmen lassen.

Aus (23.1) erhalten wir nun endgültig als Ausdruck für die Störung der Eigenfunktionen

$$\Delta \varphi_\nu(x) = \frac{\Delta \lambda_\nu}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(x) - \varepsilon \lambda_\nu I_{\nu\varepsilon} \sum_{k \neq \nu} \frac{I_{k\varepsilon}}{\lambda_k (\lambda_k - \lambda_\nu)} \varphi_k(x) - \varepsilon \lambda_\nu I_{\nu\varepsilon} \Phi_\varepsilon(x). \quad (24.6)$$

Hierin bewirkt die Abspaltung des letzten Gliedes, welches den quellenmäßig nicht darstellbaren Anteil der Entwicklungen berücksichtigt, daß die im mittleren Gliede enthaltene Reihenentwicklung nach den Eigenfunktionen gleichmäßig (und praktisch rasch genug) konvergiert.

Schließlich gehen wir, vgl. (20.2), (20.4) und (27.1), mit

$$\Delta \varphi_\nu(x) = \sqrt{\mu(x)} \Delta Y_\nu(x) \quad (25.1)$$

und

$$\Phi_\varepsilon(x) = \sqrt{\mu(x)} F_\varepsilon(x) \quad (25.2)$$

auf die Eigenschwingungen $Y_\nu(x)$ über. Wir bemerken dazu, daß die Multiplikation mit $\sqrt{\mu(x)}$ auch zulässig ist, wenn Störungen durch Einzelmassen auftreten. Die Störmassen treten dann nur in den Störparametern auf, vgl. (38.1), erfordern aber hier keine Veränderung der Massenbelegungsfunktion. Mit (25.1,2) folgt aus (24.6)

$$\Delta Y_\nu(x) = \frac{\Delta \lambda_\nu}{\lambda_\nu} Y_\nu(x) - \varepsilon \lambda_\nu I_{\nu\varepsilon} \sum_{k \neq \nu} \frac{I_{k\varepsilon}}{\lambda_k (\lambda_k - \lambda_\nu)} Y_k(x) - \varepsilon \lambda_\nu I_{\nu\varepsilon} F_\varepsilon(x). \quad (26.1)$$

Mit (20.2) und (25.2) werden die Integrale

$$\boxed{I_{\nu \varepsilon} = \lambda_{\nu} \int_0^L \mu(x) Y_{\nu}(x) F_{\varepsilon}(x) dx.} \quad (26.2)$$

Nun wird gezeigt, daß für die Änderung der Greenschen Funktion in allen hier untersuchten Störfällen (vgl. S.11)

$$\Delta G(x, \xi) = -\varepsilon F_{\varepsilon}(x) F_{\varepsilon}(\xi) \quad (27.1)$$

gilt, worin $F_{\varepsilon}(x)$ vom Störparameter ε abhängige, einfach mechanisch zu deutende Funktionen sind. Wegen

$$\Delta K(x, \xi) = \sqrt{\mu(x) \mu(\xi)} \Delta G(x, \xi) \quad (27.2)$$

sind dann die Beziehungen (24.1) und (25.2) ersichtlich.

4. DIE ÄNDERUNGEN DER GREENSCHEN FUNKTION

4.1 Störung durch Querfedern

Wird eine Maschinenwelle an der Stelle l_{ε} durch eine Querfeder mit der kleinen Federkonstanten c_Q gestört (Abb.7), so gilt für die nunmehr

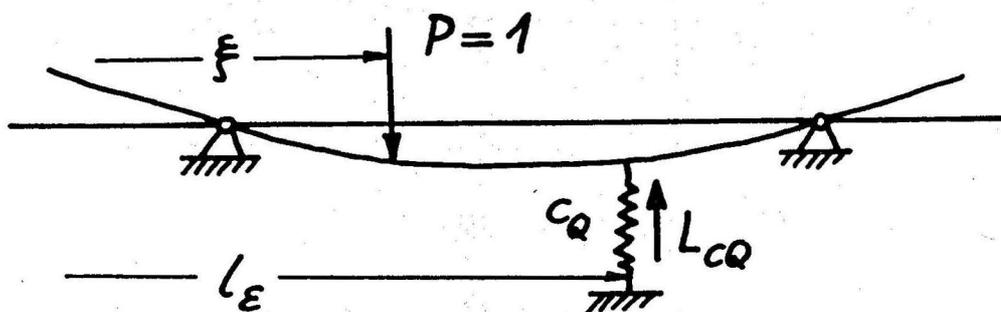


Abb.7: Störung durch eine Querfeder

gestörte Greensche Funktion

$$\tilde{G}(x, \xi) = G(x, \xi) + \Delta G(x, \xi), \quad (28.1)$$

$$\tilde{G}(x, \xi) = G(x, \xi) + L_{cQ} G(x, l_{\varepsilon}), \quad (28.2)$$

worin L_{c_Q} die von der Feder auf die Welle ausgeübte Störkraft ist.
Wegen

$$L_{c_Q} = -c_Q \tilde{G}(l_\varepsilon, \xi), \quad (28.3)$$

also in erster Näherung

$$L_{c_Q} = -c_Q G(l_\varepsilon, \xi), \quad (28.4)$$

erhält man für die Änderung der Greenschen Funktion

$$\Delta G(x, \xi) = -c_Q G(x, l_\varepsilon) G(\xi, l_\varepsilon). \quad (28.5)$$

Ein Vergleich mit (27.1) ergibt

$$\varepsilon = c_Q, \quad F_\varepsilon(x) = G(x, l_\varepsilon). \quad (28.6)$$

4.2 Störung durch Drehfedern

Bedeutet $G_M(x, \xi)$ die zur ungestörten Welle gehörige Einflußfunktion infolge eines Einheitsmomentes, so ist (Abb.8) die an der Stelle l_ε

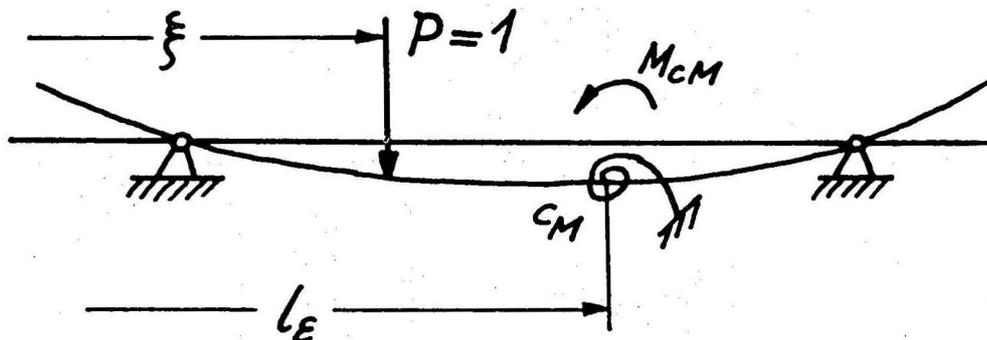


Abb.8: Störung durch eine Drehfeder

durch eine Drehfeder mit der kleinen Drehfederkonstanten c_M gestörte Greensche Funktion

$$\tilde{G}(x, \xi) = G(x, \xi) + M_{CM} G_M(x, l_\varepsilon). \quad (29.1)$$

M_{CM} ist das von der Drehfeder auf die Welle ausgeübte Störmoment. In erster Näherung ist

$$M_{CM} = -c_M \frac{\partial}{\partial x} [G(x, \xi)]_{x=l_\varepsilon}. \quad (29.2)$$

Die bekannte Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) = G_M(\xi, x) \quad (29.3)$$

führt auf

$$M_{CM} = -c_M G_M(\xi, l_\varepsilon), \quad (29.4)$$

$$\Delta G(x, \xi) = -c_M G_M(x, l_\varepsilon) G_M(\xi, l_\varepsilon), \quad (29.5)$$

also ist hier

$$\varepsilon = c_M, \quad F_\varepsilon(x) = G_M(x, l_\varepsilon). \quad (29.6)$$

4.3 Störung durch Nachgiebigkeit von Führungen

Wir betrachten eine Führung (Abb.9) an der Stelle l_ε einer statisch unbestimmt gelagerten Welle, die im gestörten Fall die kleine Drehnachgiebigkeit (reziproke Drehfederkonstante) h_M besitzt. Im ungestör-

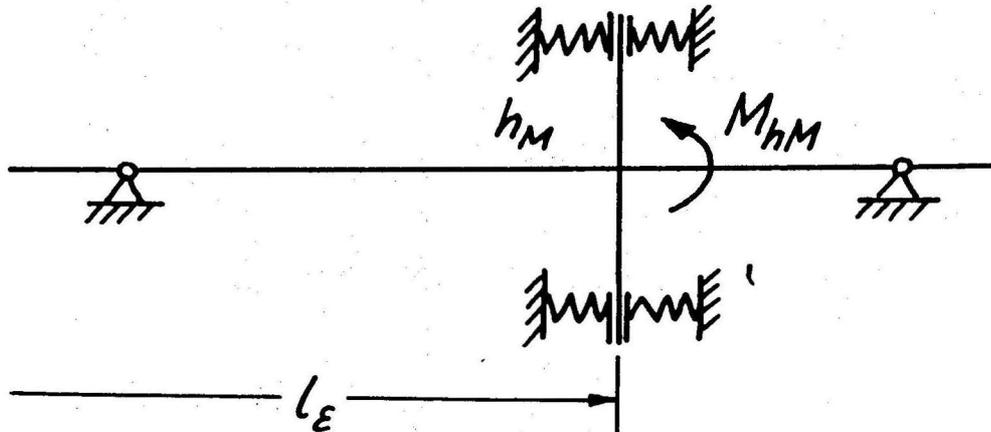


Abb.9: Störung durch Nachgiebigkeit einer Führung

ten Fall ist die Führung starr ($h_M = 0$), und es gilt

$$G(x, \xi) = \Gamma(x, \xi) + M_{hM} \Gamma_M(x, l_\varepsilon). \quad (30.1)$$

Darin sind $\Gamma(x, \xi)$ die Greensche Funktion und $\Gamma_M(x, \xi)$ die Momenten-

einflußfunktion, die die Welle hat, wenn die Führung nicht existiert ($h_M \rightarrow \infty$). M_{hM} ist das infolge der Einheitskraft an der Stelle ξ von der Führung auf die Welle ausgeübte Moment im ungestörten Fall, das man leicht berechnen kann:

$$\frac{\partial}{\partial x} [G(x, \xi)]_{x=l_\varepsilon} = 0, \quad (30.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [\Gamma(x, l_\varepsilon)]_{x=l_\varepsilon} + M_{hM} \frac{d}{dx} [\Gamma_M(x, l_\varepsilon)]_{x=l_\varepsilon} = 0, \quad (30.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [\Gamma(x, \xi)]_{x=l_\varepsilon} = \Gamma_M(\xi, l_\varepsilon), \quad (30.4)$$

$$M_{hM} = M_{hM}(\xi) = - \frac{\Gamma_M(\xi, l_\varepsilon)}{\frac{d}{dx} [\Gamma_M(x, l_\varepsilon)]_{x=l_\varepsilon}}. \quad (30.5)$$

Im gestörten Fall ist

$$\tilde{G}(x, \xi) = \Gamma(x, \xi) + (M_{hM} + \Delta M_{hM}) \Gamma_M(x, l_\varepsilon), \quad (30.6)$$

$$\tilde{G}(x, \xi) = G(x, \xi) + \Delta M_{hM} \Gamma_M(x, l_\varepsilon), \quad (30.7)$$

$$\Delta G(x, \xi) = \Delta M_{hM} \Gamma_M(x, l_\varepsilon). \quad (30.8)$$

Mit (30.5) wird

$$\Delta G(x, \xi) = - \Delta M_{hM} \cdot M_{hM} \frac{d}{dx} [\Gamma_M(x, l_\varepsilon)]_{x=l_\varepsilon}. \quad (30.9)$$

In erster Näherung gilt

$$\frac{d}{dx} [\tilde{G}(x, \xi)]_{x=l_\varepsilon} = - h_M \tilde{M}_{hM}(\xi) = - h_M M_{hM}(\xi). \quad (30.10)$$

Wegen (30.2) ist mit (30.8)

$$\frac{d}{dx} [\tilde{G}(x, \xi)]_{x=l_\xi} = \Delta M_{hM} \frac{d}{dx} [\Gamma_M(x, l_\xi)]_{x=l_\xi} \quad (30.11)$$

Damit wird

$$\Delta M_{hM} = -h_M \frac{M_{hM}(\xi)}{\frac{d}{dx} [\Gamma_M(x, l_\xi)]_{x=l_\xi}} \quad (30.12)$$

Einsetzen in (30.9) liefert

$$\Delta G(x, \xi) = h_M M_{hM}(x) M_{hM}(\xi) \quad (30.13)$$

Ein Vergleich mit (27.1) ergibt

$$\varepsilon = -h_M, \quad F_\varepsilon(x) = M_{hM}(x) = -\frac{\Gamma_M(x, l_\xi)}{\frac{d}{dx} [\Gamma_M(x, l_\xi)]_{x=l_\xi}} \quad (30.14)$$

In statisch bestimmten Fällen kann man die Funktionen $\Gamma(x, \xi)$ und $\Gamma_M(x, \xi)$ nicht angeben. Die Bestimmung der Änderung der Greenschen Funktion ist dann jedoch besonders einfach, wie die folgenden Beispiele zeigen.

a) Nachgiebige Einspannung

Im ungestörten Fall (starre Einspannung, Abb.10) übt die Einspannstelle das Moment

$$M_{hM}(\xi) = -\xi \quad (31.1)$$

auf die Welle aus. Der gestörte Fall (Abb.11) besteht aus einer in einem Drehfedergelenk gelagerten Welle. Die Drehnachgiebigkeit des Lagers ist h_M . Wirkt an diesem Lager das Drehmoment $M_{hM}(\xi)$ ein, so wird

$$y = \tan \gamma = -M_{hM}(\xi) \cdot h_M = h_M \xi = \frac{\Delta G(x, \xi)}{x}, \quad (31.2)$$

$$\Delta G(x, \xi) = h_M x \xi, \quad (31.3)$$

$$\varepsilon = -h_M, \quad F_\varepsilon(x) = M_{hM}(x) = -x. \quad (31.4)$$

Das Vorzeichen von $F_\varepsilon(x)$ ist im Hinblick auf (27.1) beliebig - wegen des Produktes $F_\varepsilon(x) F_\varepsilon(\xi)$ - nicht aber im Hinblick auf die Bedeutung der $I_{y\varepsilon}$, siehe Ziff.5.

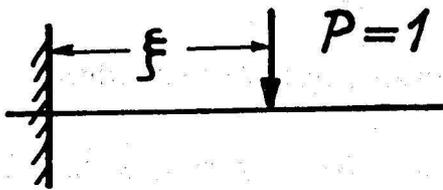


Abb.10: Starre Einspannung

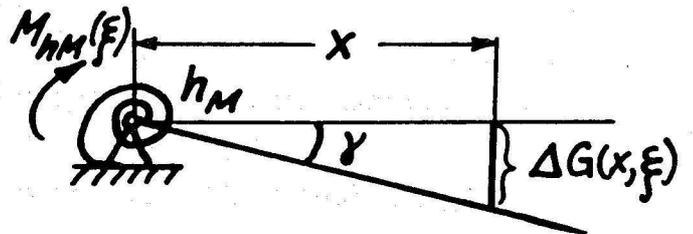


Abb.11: Nachgiebige Einspannung

b) Gelenk + nachgiebige Führung

Wie man Abb.12 und 13 entnehmen kann, gelangt man zu dem gleichen Ergebnis wie unter a).

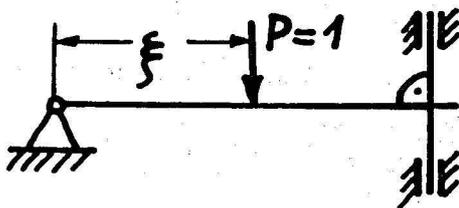


Abb.12: Gelenk + starre Führung

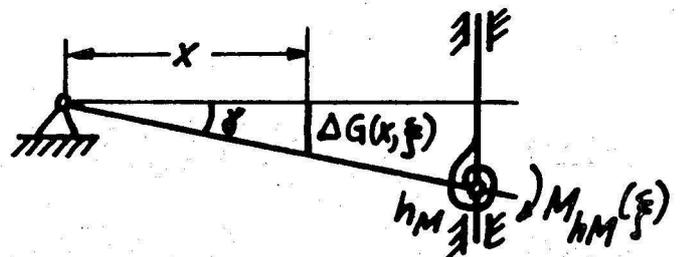


Abb.13: Gelenk + nachgiebige Führung

4.4 Störung durch Nachgiebigkeit von Lagern

Das Lager an der Stelle l_ε einer statisch unbestimmt gelagerten Welle soll im gestörten Fall die kleine Quernachgiebigkeit (reziproke Federkonstante) h_Q besitzen (Abb.14).

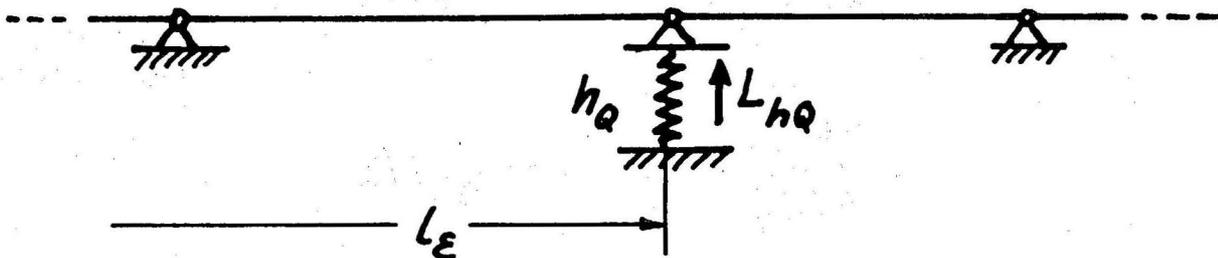


Abb.14: Störung durch Nachgiebigkeit eines Lagers

Im ungestörten Fall ist das Lager starr ($h_Q = 0$), und es gilt

$$G(x, \xi) = \Gamma(x, \xi) + L_{hQ} \Gamma(x, l_\varepsilon), \quad (32.1)$$

worin $\Gamma(x, \xi)$ jetzt die Greensche Funktion der Welle ohne das Lager an der Stelle l_ε sein soll. Die im ungestörten Fall auftretende Lagerkraft L_{hQ} ergibt sich wie folgt

$$G(l_\varepsilon, \xi) = 0 = \Gamma(l_\varepsilon, \xi) + L_{hQ} \Gamma(l_\varepsilon, l_\varepsilon) \quad (32.2)$$

$$L_{hQ} = L_{hQ}(\xi) = - \frac{\Gamma(l_\varepsilon, \xi)}{\Gamma(l_\varepsilon, l_\varepsilon)}. \quad (32.3)$$

Im gestörten Fall ist

$$\tilde{G}(x, \xi) = \Gamma(x, \xi) + (L_{hQ} + \Delta L_{hQ}) \Gamma(x, l_\varepsilon), \quad (32.4)$$

$$\tilde{G}(x, \xi) = G(x, \xi) + \Delta L_{hQ} \Gamma(x, l_\varepsilon), \quad (32.5)$$

$$\Delta G(x, \xi) = \Delta L_{hQ} \Gamma(x, l_\varepsilon). \quad (32.6)$$

Mit (32.3) wird

$$\Delta G(x, \xi) = - \Delta L_{hQ} \Gamma(l_\varepsilon, l_\varepsilon) L_{hQ}(x). \quad (32.7)$$

In erster Näherung ist

$$\tilde{G}(l_\varepsilon, \xi) = -h_Q \tilde{L}_{hQ}(\xi) = -h_Q L_{hQ}(\xi). \quad (32.8)$$

Wegen (32.2) ist mit (32.6)

$$\tilde{G}(l_\varepsilon, \xi) = \Delta L_{hQ} \Gamma(l_\varepsilon, l_\varepsilon). \quad (32.9)$$

Damit wird

$$\Delta L_{hQ} = -h_Q \frac{L_{hQ}(\xi)}{\Gamma(l_\varepsilon, l_\varepsilon)}. \quad (32.10)$$

Einsetzen in (32.7) liefert

$$\Delta G(x, \xi) = h_Q L_{hQ}(x) L_{hQ}(\xi). \quad (32.11)$$

Ein Vergleich mit (27.1) ergibt

$$\varepsilon = -h_Q, \quad \frac{\xi}{\varepsilon}(x) = L_{hQ}(x) = -\frac{\Gamma(x, l_\varepsilon)}{\Gamma'(l_\varepsilon, l_\varepsilon)}. \quad (32.12)$$

In den statisch bestimmten Fällen (in denen es keine Funktion $\Gamma(x, \xi)$ gibt) erhält man, wie die folgenden Beispiele zeigen, ebenso wie in Ziff. 4.3 ganz einfache Ausdrücke für die Änderung der Greenschen Funktion.

a) Gelenk + nachgiebiges Lager

Gemäß Abb.15 und 16 wird

$$L_{hQ} \cdot l = -\xi, \quad (33.1)$$

$$L_{hQ} = -\frac{\xi}{l}, \quad (33.2)$$

$$\frac{\Delta G(x, \xi)}{x} = \frac{-L_{hQ} \cdot h_Q}{l} = \frac{h_Q \frac{\xi}{l}}{l}, \quad (33.3)$$

$$\Delta G(x, \xi) = h_Q \frac{x \xi}{l^2}, \quad (33.4)$$

$$\varepsilon = -h_Q, \quad F_\varepsilon(x) = L_{h_Q}(x) = -\frac{x}{l}. \quad (33.5)$$

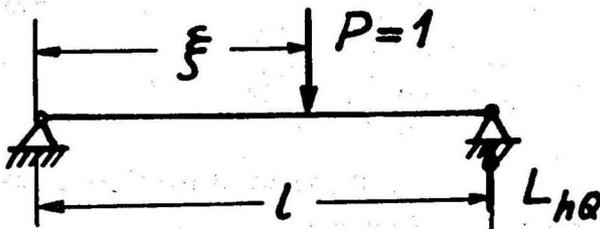


Abb.15: Beidseitig gelenkig gelagerte Welle

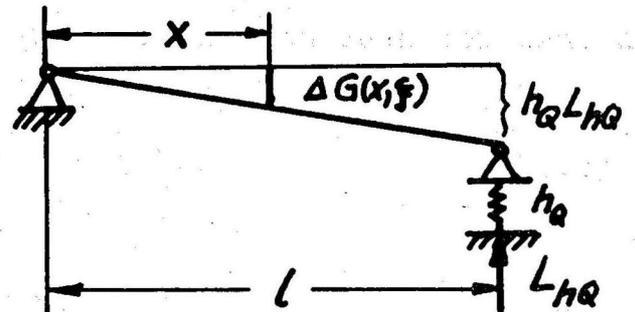


Abb.16: Gelenk + nachgiebiges Lager

b) Führung + nachgiebiges Lager

Den Abbildungen 17 und 18 entnimmt man

$$\Delta G(x, \xi) = h_Q L_{h_Q}, \quad (33.6)$$

$$\varepsilon = -h_Q, \quad F_\varepsilon(x) = L_{h_Q} = -1. \quad (33.7)$$

$$(33.8)$$

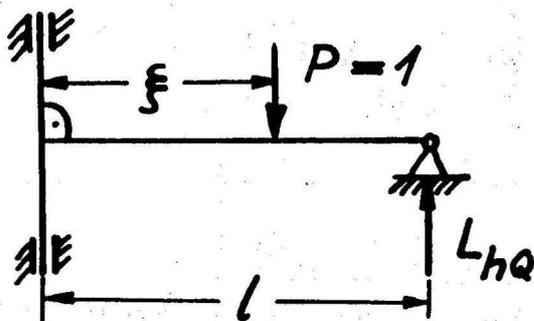


Abb.17: Führung + Gelenk

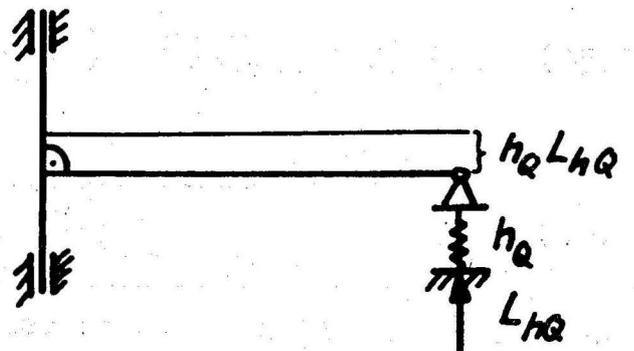


Abb.18: Führung + nachgiebiges Lager

5. DIE BEDEUTUNG DER INTEGRALE $I_{\nu\epsilon}$

Wir hatten

$$I_{\nu\epsilon} = \lambda_\nu \int_0^l \mu(x) Y_\nu(x) F_\epsilon(x) dx \quad (34.1)$$

gesetzt und werden nun sehen, daß diese Ausdrücke für die verschiedenen $F_\epsilon(x)$ sehr einfach gedeutet werden können.

Bei einer Störung durch eine Quersfeder mit der kleinen Federkonstanten c_Q war

$$F_\epsilon(x) = F_{cQ}(x) = G(x, l_\epsilon), \quad (34.2)$$

und man erkennt sofort

$$\boxed{I_{\nu\epsilon} = I_{\nu cQ} = Y_\nu(l_\epsilon)}. \quad (34.3)$$

$I_{\nu\epsilon}$ ist also in diesem Fall gleich dem Wert der normierten Eigenfunktion an der Störstelle l_ϵ .

Bei einer Störung durch eine Drehfeder mit der kleinen Drehfederkonstanten c_M war

$$F_\epsilon(x) = F_{cM}(x) = G_M(x, l_\epsilon). \quad (35.1)$$

Es ist

$$Y_\nu'(x) = \lambda_\nu \int_0^l \mu(\xi) Y_\nu(\xi) \frac{\partial}{\partial x} [G(x, \xi)] d\xi, \quad (35.2)$$

$$Y_\nu'(x) = \lambda_\nu \int_0^l \mu(\xi) Y_\nu(\xi) G_M(\xi, x) d\xi. \quad (35.3)$$

Also wird

$$\boxed{I_{\nu\epsilon} = I_{\nu cM} = Y_\nu'(l_\epsilon)}. \quad (35.4)$$

$I_{\nu\epsilon}$ ist gleich dem Wert der Neigung der normierten Eigenfunktion an der Störstelle l_ϵ .

Bei einer Störung durch Nachgiebigkeit einer Führung war

$$F_{\varepsilon}(x) = F_{hM}(x) = M_{hM}(x). \quad (36.1)$$

In statisch unbestimmten Fällen kann man schreiben, vgl. (30.1),

$$Y_{\nu}(x) = \lambda_{\nu} \int_0^l \mu(\xi) [\Gamma(x, \xi) + M_{hM}(\xi) \Gamma_M(x, l_{\varepsilon})] Y_{\nu}(\xi) d\xi, \quad (36.2)$$

$$Y_{\nu}(x) = \lambda_{\nu} \int_0^l \mu(\xi) \Gamma(x, \xi) Y_{\nu}(\xi) d\xi \quad (36.3)$$

$$+ \left[\lambda_{\nu} \int_0^l \mu(\xi) M_{hM}(\xi) Y_{\nu}(\xi) d\xi \right] \Gamma_M(x, l_{\varepsilon}),$$

$$Y_{\nu}(x) = \lambda_{\nu} \int_0^l \mu(\xi) \Gamma(x, \xi) Y_{\nu}(\xi) d\xi + M_{\nu hM} \Gamma_M(x, l_{\varepsilon}). \quad (36.4)$$

Darin ist

$$M_{\nu hM} = \lambda_{\nu} \int_0^l \mu(x) M_{hM}(x) Y_{\nu}(x) dx \quad (36.5)$$

das Moment, das bei der normierten Eigenschwingung von der Führung an der Störstelle l_{ε} auf die Welle ausgeübt wird. Man erkennt

$$\boxed{I_{\nu\varepsilon} = I_{\nu hM} = M_{\nu hM}.} \quad (36.6)$$

Diese Beziehung ist auch auf die statisch bestimmten Fälle, vgl. (31.4), anwendbar, was man leicht einsehen kann.

Bei einer Störung durch Nachgiebigkeit eines Lagers war

$$F_{\varepsilon}(x) = F_{hQ}(x) = L_{hQ}(x). \quad (37.1)$$

In statisch unbestimmten Fällen kann man schreiben, vgl. (32.1),

$$Y_\nu(x) = \lambda_\nu \int_0^l \mu(\xi) [\Gamma(x, \xi) + L_{hQ}(\xi) \Gamma(x, l_\epsilon)] Y_\nu(\xi) d\xi, \quad (37.2)$$

$$Y_\nu(x) = \lambda_\nu \int_0^l \mu(\xi) \Gamma(x, \xi) Y_\nu(\xi) d\xi + \left[\lambda_\nu \int_0^l \mu(\xi) L_{hQ}(\xi) Y_\nu(\xi) d\xi \right] \Gamma(x, l_\epsilon), \quad (37.3)$$

$$Y_\nu(x) = \lambda_\nu \int_0^l \mu(\xi) \Gamma(x, \xi) Y_\nu(\xi) d\xi + L_{\nu hQ} \Gamma(x, l_\epsilon). \quad (37.4)$$

Darin ist

$$L_{\nu hQ} = \lambda_\nu \int_0^l \mu(x) Y_\nu(x) L_{hQ}(x) dx \quad (37.5)$$

die Kraft, die bei der normierten Eigenschwingung vom Lager an der Störstelle l_ϵ auf die Welle ausgeübt wird. Man erkennt

$$\boxed{I_{\nu\epsilon} = I_{\nu hQ} = L_{\nu hQ}}. \quad (37.6)$$

Auch diese Beziehung ist auf die statisch bestimmten Fälle, vgl. (33.5), anwendbar, wie leicht einzusehen ist.

6. DIE ÄNDERUNGEN DER EIGENWERTE UND DER EIGENFUNKTIONEN

Auf Grund des Vorangegangenen können wir die Änderungen infolge von Störungen durch Quer- und Drehfedern sowie Störungen durch Nachgiebigkeiten von Führungen und Lagern berechnen. Es fehlen noch diejenigen Änderungen die sich infolge von Störungen durch einzelne Massen und Scheiben (Massenträgheitsmomente) ergeben. Den Einfluß dieser Störungen können wir aber sofort angeben, denn bekanntlich, vgl. [2], braucht

man nur die Federkonstante

$$c_Q \text{ zu ersetzen durch } -m_{cQ} \tilde{\lambda}_\nu = -m_{cQ} \lambda_\nu, \quad (38.1)$$

wenn an der Stelle l_ε der Welle statt der Federkraft die Trägheitskraft der Einzelmasse m_{cQ} angreift. Ganz analog ist

$$c_M \text{ zu ersetzen durch } \pm \theta_{cM} \tilde{\lambda}_\nu = \pm \theta_{cM} \lambda_\nu, \quad (38.2)$$

wobei das Plus-Zeichen für die Kreiselwirkung (im Gleichlauf) und das Minus-Zeichen für die Trägheitswirkung (bei Biegeschwingungen) zu setzen ist. Ferner gilt bei einer sogenannten zwischengekoppelten Masse bei einem Lager, vgl. Abb.19,

$$h_Q = \frac{1}{c_0} + \frac{1}{c_u - m_{hQ} \lambda_\nu}, \quad (38.3)$$

so daß auch dieser Einfluß (vgl. [2]), berücksichtigt werden kann, sofern h_Q klein genug ist.

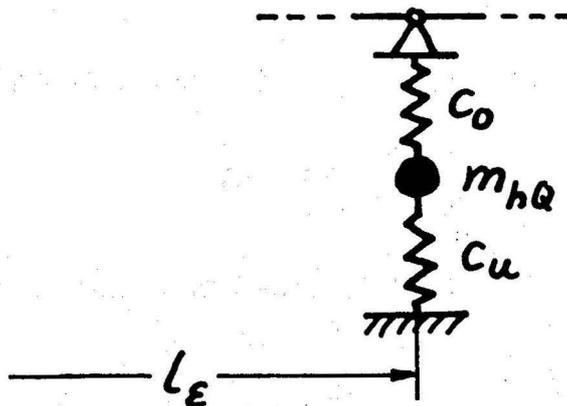


Abb.19: Zwischengekoppelte Masse

Wir können jetzt den Einfluß aller in Tabelle 1 (siehe Seite 11) angegebenen Störungen berechnen. Für die praktische Durchführung dieser Rechnungen erscheinen noch einige Hinweise angebracht: Man beachte stets, daß die Eigenfunktionen $Y_\nu(x)$ die Normierungsvorschrift (20.10) erfüllen:

$$\int_0^l \mu(x) Y_\nu^2(x) dx = 1. \quad (39.1)$$

Die aus einem ungestörten Fall bekannten Eigenfunktionen sind im allgemeinen nicht normiert. Diese nicht normierten Eigenfunktionen, die wir mit $W_\nu(x)$ bezeichnen wollen, müssen also erst auf die normierte Form gebracht werden. Es sei

$$\int_0^l \mu(x) W_\nu^2(x) dx = q \quad (39.2)$$

und

$$Y_\nu(x) = a W_\nu(x), \quad (39.3)$$

also

$$W_\nu(x) = \frac{1}{a} Y_\nu(x). \quad (39.4)$$

Die Konstante a muß nun so bestimmt werden, daß $q = 1$ wird:

$$\int_0^l \mu(x) \left[\frac{1}{a} Y_\nu(x) \right]^2 dx = q. \quad (39.5)$$

Mit (39.1) folgt aus (39.5)

$$a = \frac{1}{\sqrt{q}}. \quad (39.6)$$

Die normierten Eigenfunktionen $Y_\nu(x)$ erhält man somit gemäß

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{q}} W_\nu(x) = \frac{W_\nu(x)}{\sqrt{\int_0^l \mu(x) W_\nu^2(x) dx}} \quad (39.7)$$

aus den nicht normierten Eigenfunktionen $W_\nu(x)$.- In vielen Fällen werden die Eigenfunktionen nur punktweise vorliegen, z.B. als Ergebnis einer Rechnung, der eine Welle mit Einzelmassen und dazwischenliegenden, nur elastischen Wellenstücken zu Grunde liegt. Dann geht die Normierungsvorschrift über in

$$Y_\nu(x_i) = \frac{W_\nu(x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n m_i W_\nu^2(x_i)}}, \quad (39.8)$$

worin der Index i zur Kennzeichnung der diskret liegenden Punkte x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) dient. Die normierten Neigungen, Momente und Querkräfte erhält man genauso, indem man die nicht normierten Werte durch

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n m_i W_\nu^2(x_i)} \quad (39.9)$$

dividiert.

Ferner soll hier nochmals bemerkt werden, daß bei gleichzeitigem Auftreten mehrerer Störungen die einzelnen Änderungen der Eigenwerte und Eigenfunktionen addiert bzw. linear superponiert werden können, da nur erste Näherungen in Frage kommen.- In den Tabellen 2 und 3 sind die Ergebnisse der Arbeit übersichtlich zusammengestellt.

Schließlich sei noch auf einen interessanten Zusammenhang hingewiesen: Man kann die Ergebnisse für die Änderungen der Eigenwerte auch mit Hilfe des Rayleighschen Quotienten erhalten. Bekanntlich ist der Eigenwert im ungestörten Fall

$$\lambda_\nu = \frac{E_p}{E_b} . \quad (40.1)$$

Darin ist E_p die potentielle Energie und E_b die sogenannte bezogene kinetische Energie der ungestörten Welle. Für den gestörten Eigenwert können wir schreiben

$$\tilde{\lambda}_\nu = \lambda_\nu + \Delta\lambda_\nu = \frac{\tilde{E}_p}{\tilde{E}_b} = \frac{E_p + \Delta E_p}{E_b + \Delta E_b} . \quad (40.2)$$

ΔE_p und ΔE_b sind darin die Änderungen der genannten Energien. Wenn ΔE_p und ΔE_b klein sind und nur in erster Näherung berücksichtigt

T a b e l l e 2

Zusammenstellung der Formeln für die Änderungen
der Eigenwerte und Eigenfunktionen

Nicht normierte, ungestörte Eigenfunktionen:	$W_\nu(x)$
Ungestörte Eigenwerte.....:	$\lambda_\nu = \omega_\nu^2$
Gestörte Eigenwerte.....:	$\tilde{\lambda}_\nu = \lambda_\nu + \Delta\lambda_\nu$
Gestörte Eigenfunktionen.....:	$\tilde{Y}_\nu(x) = Y_\nu(x) + \Delta Y_\nu(x)$

Normierte, ungestörte Eigenfunktionen:

$$Y_\nu(x) = \frac{W_\nu(x)}{\sqrt{\int_0^l \mu(x) W_\nu^2(x) dx}}$$

bzw.

$$Y_\nu(x_i) = \frac{W_\nu(x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n m_i W_\nu^2(x_i)}}$$

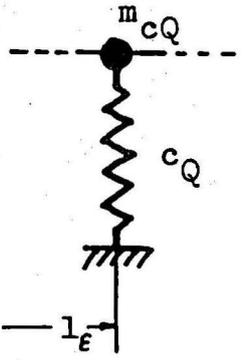
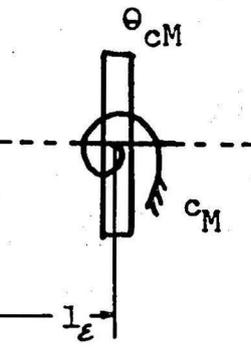
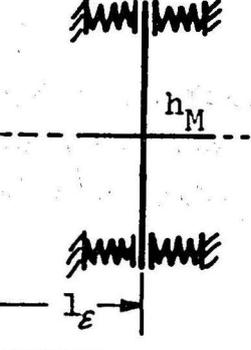
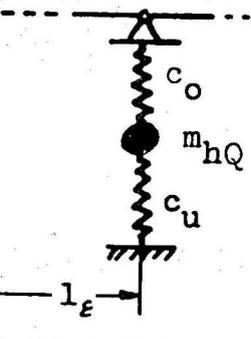
Nach Ziffer 3.2:

$$\Delta\lambda_\nu = \varepsilon I_{\nu\varepsilon}^2$$

$$\begin{aligned} \Delta Y_\nu(x) = & \frac{\Delta\lambda_\nu}{\lambda_\nu} Y_\nu(x) \\ & - \varepsilon I_{\nu\varepsilon} \sum_{k \neq \nu} \frac{I_{k\varepsilon}}{\lambda_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_\nu} - 1 \right)} Y_k(x) \\ & - \varepsilon I_{\nu\varepsilon} F_\varepsilon(x) \end{aligned}$$

T a b e l l e 3

Zusammenstellung der Störparameter ϵ , der Störfunktionen $F_\epsilon(x)$ und der Integrale $I_{\nu\epsilon}$

Störung	ϵ	$F_\epsilon(x)$	$I_{\nu\epsilon}$
	$\frac{c_Q - m_{cQ} \lambda_\nu}{}$ <p>vgl. Ziff. 4.1 und Ziff. 6</p>	$F_{cQ}(x) = \underline{G(x, l_\epsilon)}$ <p>vgl. Ziff. 4.1</p>	$I_{\nu cQ} = \underline{Y_\nu(l_\epsilon)}$ <p>vgl. Ziff. 5</p>
	$\frac{c_M \pm \theta_{cM} \lambda_\nu}{}$ <p>+ Kreiselwirkung - Drehträgheit</p> <p>vgl. Ziff. 4.2 und Ziff. 6</p>	$F_{cM}(x) = \underline{G_M(x, l_\epsilon)}$ <p>vgl. Ziff. 4.2</p>	$I_{\nu cM} = \underline{Y'_\nu(l_\epsilon)}$ <p>vgl. Ziff. 5</p>
	$\underline{- h_M}$ <p>vgl. Ziff. 4.3</p>	$F_{hM}(x) = \underline{M_{hM}(x)}$ <p>vgl. Ziff. 4.3</p>	$I_{\nu hM} = \underline{M_{\nu hM}}$ <p>vgl. Ziff. 5</p>
	$\underline{- h_Q = - \left(\frac{1}{c_o} + \frac{1}{c_u - m_{hQ}} \right)}$ <p>vgl. Ziff. 4.4 und Ziff. 6</p>	$F_{hQ}(x) = \underline{L_{hQ}(x)}$ <p>vgl. Ziff. 4.4</p>	$I_{\nu hQ} = \underline{L_{\nu hQ}}$ <p>vgl. Ziff. 5</p>

werden sollen, folgt aus (40.2)

$$\begin{aligned}
 \lambda_\nu + \Delta\lambda_\nu &= \frac{E_p + \Delta E_p}{E_b \left(1 + \frac{\Delta E_b}{E_b}\right)}, \\
 &= \frac{E_p + \Delta E_p}{E_b} \left(1 - \frac{\Delta E_b}{E_b}\right), \\
 &= \frac{E_p}{E_b} + \frac{\Delta E_p}{E_b} - \frac{E_p}{E_b^2} \Delta E_b.
 \end{aligned}
 \tag{40.3}$$

Also ist wegen (40.1)

$$\Delta\lambda_\nu = \frac{\Delta E_p}{E_b} - \frac{\lambda_\nu \Delta E_b}{E_b}.
 \tag{40.4}$$

Nun ist

$$E_b = \frac{1}{2} \int_0^l \mu(x) W_\nu^2(x) dx,
 \tag{40.5}$$

und man erkennt den Zusammenhang mit der Normierungsvorschrift (39.7). Wenn wir zur Bildung von E_p und E_b bereits die normierten Eigenfunktionen $Y_\nu(x)$ heranziehen, ist also

$$\Delta\lambda_\nu = 2 \Delta E_p - 2\lambda_\nu \Delta E_b.
 \tag{40.6}$$

Im Falle einer Störung durch eine kleine Querfeder mit der Federkonstanten c_Q an der Stelle l_ε ist in erster Näherung

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} c_Q \tilde{Y}_\nu^2(l_\varepsilon) = \frac{1}{2} c_Q Y_\nu^2(l_\varepsilon),
 \tag{41.1}$$

also mit (40.6) wegen $\Delta E_b = 0$

$$\Delta E_b = c_Q Y_\nu^2(l_\varepsilon).
 \tag{41.2}$$

Ist die Störung an dieser Stelle nicht durch diese Feder, sondern durch die kleine Masse m_{cQ} bedingt, so ist $\Delta E_p = 0$, aber (in erster Näherung)

$$\Delta E_b = \frac{1}{2} m_{cQ} Y_\nu^2(l_\varepsilon), \quad (42.1)$$

also mit (40.6)

$$\Delta \lambda_\nu = -m_{cQ} \lambda_\nu Y_\nu^2(l_\varepsilon). \quad (42.2)$$

Im Falle der Störung eines ursprünglich starren Lagers an der Stelle l_ε durch Übergang zu einem elastischen Lager mit der sehr großen Federkonstanten c_{hQ} bzw. der sehr kleinen Nachgiebigkeit

$$h_Q = \frac{1}{c_{hQ}} \quad (43.1)$$

kann man schreiben

$$\Delta E_p = -\frac{1}{2} c_{hQ} \tilde{Y}_\nu^2(l_\varepsilon). \quad (43.2)$$

Die potentielle Energie der Welle muß abnehmen (daher das Minuszeichen), wenn an die Stelle eines starren Lagers ein elastisches Lager tritt, denn die Welle setzt dann einer Verformung einen geringeren Widerstand entgegen.

Nun ist

$$\tilde{L}_\nu^{dyn}(l_\varepsilon) = -c_{hQ} \tilde{Y}_\nu(l_\varepsilon), \quad (43.3)$$

also

$$\tilde{Y}_\nu(l_\varepsilon) = -\frac{1}{c_{hQ}} \tilde{L}_\nu^{dyn}(l_\varepsilon). \quad (43.4)$$

Mit (43.4) und (43.1) folgt aus (43.2)

$$\Delta E_p = -\frac{1}{2} h_Q \left[\tilde{L}_\nu^{dyn}(l_\varepsilon) \right]^2. \quad (43.5)$$

In erster Näherung ist daher

$$\Delta E_p = -\frac{1}{2} h_Q [L_\nu^{dyn}(l_\epsilon)]^2. \quad (43.6)$$

Aus (40.6) kommt somit wegen $\Delta E_b = 0$

$$\Delta \lambda_\nu = -h_Q [L_\nu^{dyn}(l_\epsilon)]^2. \quad (43.7)$$

Es erübrigt sich, alle Änderungen der Eigenwerte in erster Näherung hier noch einmal auf dem Wege über den Rayleigh'schen Quotienten herzuleiten. Es sollte lediglich auf diesen zweiten Weg hingewiesen werden, und es ist fraglich, ob man ihn ohne Kenntnis der Ergebnisse beschriften hätte. Dies zeigt besonders das Vorgehen beim Übergang von einem starren zu einem etwas nachgiebigen Lager.

Zur Herleitung der Änderungen der Eigenfunktionen in erster Näherung dürfte es keinen einfacheren Weg als den über die Integralgleichung geben.

8. BEISPIELE

8.1 Beispiel 1

Wir betrachten den im ungestörten Fall an den Enden gelenkig gelagerten Stab der Länge l mit konstantem E , I und μ , vgl. Ziff.2, Abb.4, S. 15. Im gestörten Fall habe das rechte Lager die Nachgiebigkeit h_{Q2} . Abb. 20 dient zur Erläuterung.

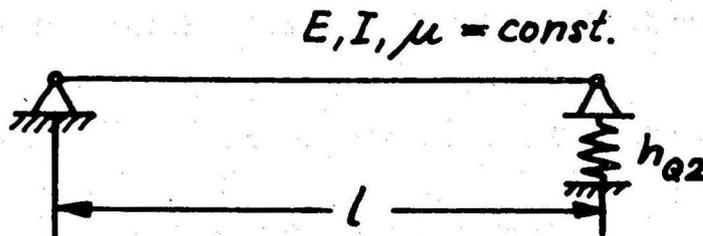


Abb.20: Beispiel 1

Es sollen nun die Näherungslösungen für die ersten drei Eigenschwingungen aufgestellt und mit den exakten Lösungen verglichen werden. Wir können hier zwei Arten von Näherungslösungen angeben, nämlich

- a) die Näherungslösungen, die man, ausgehend von der Differentialgleichung und den zugehörigen Randbedingungen, erhält, vgl. Ziff.2, und
- b) die Näherungslösungen, die sich, ausgehend von der Integralgleichung, ergeben, vgl. Tabelle 2, S. 44.

Man kann also zusätzlich einen Vergleich dieser beiden Arten von Näherungslösungen vornehmen. Wir werden sehen, daß sich die jeweiligen Näherungen für die gestörten Eigenwerte nicht unterscheiden, wohl aber die jeweiligen Näherungen für die gestörten Eigenfunktionen.

Um einen zahlenmäßigen Vergleich durchführen zu können, muß der Störparameter h_{Q2} näher festgelegt werden. Es genügt, die Nachgiebigkeit des Lagers in eine feste Beziehung zur Nachgiebigkeit des Stabes zu setzen. Die Durchsenkung in der Mitte des ungestörten Stabes infolge einer dort angreifenden Kraft P ist bekanntlich, vgl. Abb.21,

$$f = \frac{Pl^3}{48EI} \quad (44.1)$$

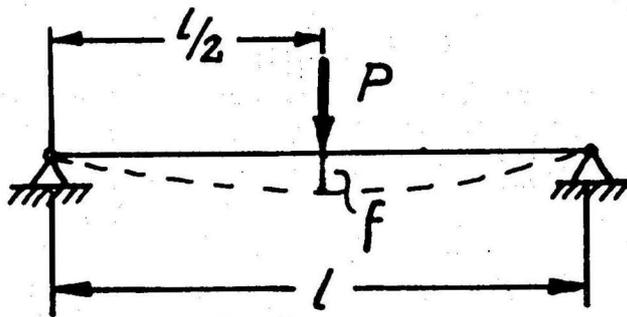


Abb.21: Zur Herleitung der Nachgiebigkeit h_{Q2}

Die Nachgiebigkeit an dieser Stelle wird somit

$$h_f = \frac{f}{P} = \frac{l^3}{48 EI} \quad (44.2)$$

Wir setzen

$$h_{Q2} = \frac{l^3}{500 EI} \approx \frac{1}{10} h_f \quad (44.3)$$

In Ziff.2 wurden bereits die ungestörten Eigenwerte, vgl. (12.6),

$$\lambda_\nu = \omega_\nu^2 = \left(\frac{\nu\pi}{l}\right)^4 \frac{EI}{\mu} \quad (45.1)$$

und die ungestörten (nicht normierten) Eigenfunktionen, vgl. (12.2) und (12.4),

$$W_\nu(x) = A_0 \sin \frac{\nu\pi}{l} x \quad (45.2)$$

mit der beliebigen Konstanten A_0 bestimmt. Wir schreiben hier $W_\nu(x)$ statt $Y_\nu(x)$, vgl. (12.2), weil für den erwähnten Vergleich - im Gegensatz zu Ziff.2 - der Unterschied zwischen normierten und nicht normierten Funktionen zu beachten ist. Ein Vergleich der Funktionen kann nur sinnvoll sein, wenn alle Funktionen die gleiche Normierungsbedingung, bei uns ist es die Bedingung (39.7), erfüllen. Die normierten ungestörten Eigenfunktionen folgen mit (39.7) zu

$$Y_\nu(x) = \frac{A_0 \sin \frac{\nu\pi}{l} x}{\sqrt{\int_0^l \mu (A_0 \sin \frac{\nu\pi}{l} x)^2 dx}}, \quad (45.3)$$

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\mu l}} \sin \frac{\nu\pi}{l} x. \quad (45.4)$$

Wenn wir

$$A_0 = \sqrt{\frac{2}{\mu l}} \quad (45.5)$$

setzen, können wir also für $W_\nu(x)$ auch $Y_\nu(x)$ schreiben und die in Ziff.2 hergeleiteten Beziehungen für die Änderungen der Eigenfunktionen übernehmen. Mit (12.4), (14), (15), (16.10), (16.14) und (45.5) folgt, da außer h_{Q2} kein weiterer Störparameter auftritt,

$$\Delta \lambda_\nu = -h_{Q2} \frac{2}{\mu l} (EI)^2 \left(\frac{\nu\pi}{l}\right)^6, \quad (46.1)$$

$$\Delta Y_\nu(x) = -h_{Q2} \sqrt{\frac{2}{\mu l}} \frac{EI}{2} \left(\frac{\nu\pi}{l}\right)^3 \left[\frac{\cos \nu\pi}{\sin \nu\pi} \gamma \sin \frac{\nu\pi}{l} x + \frac{x}{l} \cos \frac{\nu\pi}{l} x \right]. \quad (46.2)$$

Wenn in (46.1) und (46.2) der Wert für h_{Q2} gemäß (44.3) eingesetzt wird, kommt bei Berücksichtigung von (45.1)

$$\Delta \lambda_\nu = -\lambda_\nu \frac{(2\nu\pi)^2}{1000}, \quad (46.3)$$

$$\Delta Y_\nu(x) = -\sqrt{\frac{2}{\mu l}} \frac{(\nu\pi)^3}{1000} \left[\frac{\cos \nu\pi}{\sin \nu\pi} \gamma \sin \frac{\nu\pi}{l} x + \frac{x}{l} \cos \frac{\nu\pi}{l} x \right]. \quad (46.4)$$

Damit sind die Änderungen der Eigenwerte und der Eigenfunktionen auf dem Wege über die Differentialgleichung und die Randbedingungen gefunden.

Der Weg über die Integralgleichung liefert unter Zuhilfenahme der Tabellen 2 und 3 auf den Seiten 44 und 45

$$\Delta \lambda_\nu = - h_{Q2} I_{\nu h Q2}^2, \quad (47.1)$$

$$\begin{aligned} \Delta Y_\nu(x) &= \frac{\Delta \lambda_\nu}{\lambda_\nu} Y_\nu(x) \\ &+ h_{Q2} I_{\nu h Q2} \sum_{k \neq \nu} \frac{I_{k h Q2}}{\lambda_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_\nu} - 1 \right)} Y_k(x) \\ &+ h_{Q2} I_{\nu h Q2} F_{h Q2}(x). \end{aligned} \quad (47.2)$$

Es ist, vgl. (37.5),

$$I_{\nu h Q2} = L_{\nu h Q2} = \lambda_\nu \int_0^l \mu(x) Y_\nu(x) L_{h Q2}(x) dx. \quad (47.3)$$

Mit (33.5),

$$F_{h Q2}(x) = L_{h Q2}(x) = - \frac{x}{l}, \quad (47.4)$$

wird unter Beachtung von (45.1) und (45.4)

$$I_{\nu h Q2} = \left(\frac{\nu \pi}{l} \right)^4 \frac{EI}{\mu} \int_0^l \mu \sqrt{\frac{2}{\mu l}} \sin \frac{\nu \pi}{l} x \left(- \frac{x}{l} \right) dx, \quad (47.5)$$

$$I_{\nu h Q2} = - \sqrt{\frac{2}{\mu l}} \cdot \left(\frac{\nu \pi}{l} \right)^4 \cdot \frac{EI}{l} \int_0^l x \sin \frac{\nu \pi}{l} x dx, \quad (47.6)$$

$$I_{\nu h Q2} = - \sqrt{\frac{2}{\mu l}} \left(\frac{\nu \pi}{l} \right)^4 \cdot \frac{EI}{l} \cdot \left[- \frac{l}{\nu \pi} \cdot l \cos \nu \pi \right], \quad (47.7)$$

$$\left. \begin{aligned} I_{\nu h_{Q2}} &= \sqrt{\frac{2}{\mu l}} EI \left(\frac{\nu \pi}{l}\right)^3 (-1)^\nu, \\ I_{k h_{Q2}} &= \sqrt{\frac{2}{\mu l}} EI \left(\frac{k \pi}{l}\right)^3 (-1)^k. \end{aligned} \right\} \quad (47.8)$$

Mit (47.8) und (47.4) folgt aus (47.1) und (47.2)

$$\Delta \lambda_\nu = -h_{Q2} \frac{2}{\mu l} (EI)^2 \left(\frac{\nu \pi}{l}\right)^6, \quad (47.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta Y_\nu(x) &= -h_{Q2} \sqrt{\frac{2}{\mu l}} EI \left(\frac{\nu \pi}{l}\right)^3 \left\{ \frac{2}{\nu \pi} \sin \frac{\nu \pi}{l} x \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\pi} (-1)^\nu \sum_{k \neq \nu} \frac{(-1)^k}{k \left[\left(\frac{k}{\nu}\right)^4 - 1 \right]} \sin \frac{k \pi}{l} x \right. \\ &\quad \left. + (-1)^\nu \frac{x}{l} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (47.10)$$

Man erkennt, daß die Änderungen der Eigenwerte (47.9) und (46.1) übereinstimmen, nicht aber die Änderungen der Eigenfunktionen (47.10) und (46.2).

Wenn h_{Q2} gemäß (44.3) in (47.9) und (47.10) eingesetzt wird, kommt

$$\Delta \lambda_\nu = - \lambda_\nu \frac{(2\nu\pi)^2}{1000}, \quad (47.11)$$

$$\Delta Y_\nu(x) = - \sqrt{\frac{2}{\mu l}} \frac{(\nu\pi)^3}{500} \left[\frac{2}{\nu\pi} \sin \frac{\nu\pi x}{l} - \frac{2}{\pi} (-1)^\nu \sum_{k \neq \nu} \frac{(-1)^k}{k \left[\left(\frac{k}{\nu}\right)^4 - 1 \right]} \sin \frac{k\pi x}{l} + (-1)^\nu \frac{x}{l} \right] \quad (47.12)$$

Jetzt sollen die exakten Lösungen des gestörten Problems bestimmt werden. Dies geschieht am einfachsten über die Differentialgleichung und die Randbedingungen. Die bereits eingeführten Bezeichnungen werden bis auf eine kleine Änderung beibehalten. Diese Änderung besteht in der Hinzufügung des Buchstabens e als Index.

Die Differentialgleichung lautet

$$\tilde{W}_{e\nu}''''(x) - \tilde{\kappa}_{e\nu}^4 \tilde{W}_{e\nu}(x) = 0 \quad (48.1)$$

mit

$$\tilde{\kappa}_{e\nu}^4 = \tilde{\lambda}_{e\nu} \frac{99}{EI} = \tilde{\lambda}_{e\nu} \alpha, \quad (48.2)$$

vgl. (9), (13), (14) und (15). Die allgemeine Lösung von (48.1) ist, vgl. (11),

$$\tilde{W}_{e\nu}(x) = \tilde{A}_{e\nu} \sin \tilde{\kappa}_{e\nu} x + \tilde{B}_{e\nu} \cos \tilde{\kappa}_{e\nu} x + \tilde{C}_{e\nu} \sin \tilde{\kappa}_{e\nu} x + \tilde{D}_{e\nu} \operatorname{Log} \tilde{\kappa}_{e\nu} x. \quad (48.3)$$

Die Randbedingungen sind

$$\tilde{W}_{ev}(0) = 0, \quad (48.4)$$

$$\tilde{W}_{ev}''(0) = 0, \quad (48.5)$$

$$\tilde{W}_{ev}''(l) = 0, \quad (48.6)$$

$$EI \tilde{W}_{ev}'''(l) = \frac{1}{h_{Q2}} \tilde{W}_{ev}(l). \quad (48.7)$$

Mit (48.4) und (48.5) folgt aus (48.3)

$$\tilde{B}_{ev} = \tilde{D}_{ev} = 0. \quad (48.8)$$

Aus (48.6) folgt

$$\frac{\tilde{C}_{ev}}{\tilde{A}_{ev}} = \left(\frac{\tilde{C}}{\tilde{A}}\right)_{ev} = \frac{\sin \tilde{\kappa}_{ev} l}{\gamma \sin \tilde{\kappa}_{ev} l}. \quad (48.9)$$

Aus (48.7) kommt mit (48.9)

$$\frac{2}{h_{Q2} EI \tilde{\kappa}_{ev}^3} + \cot \tilde{\kappa}_{ev} l - \gamma \cot \tilde{\kappa}_{ev} l = 0. \quad (48.10)$$

h_{Q2} gemäß (44.3) in (48.10) eingesetzt, liefert

$$\frac{1000}{(\tilde{\kappa}_{ev} l)^3} + \cot \tilde{\kappa}_{ev} l - \gamma \cot \tilde{\kappa}_{ev} l = 0. \quad (48.11)$$

Die ersten drei Lösungen von (48.11) sind

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\kappa}_{e1} l &= 3,1123, \\ \tilde{\kappa}_{e2} l &= 6,1003, \\ \tilde{\kappa}_{e3} l &= 9,0242. \end{aligned} \right\} \quad (48.12)$$

Die zugehörigen Eigenwerte $\tilde{\lambda}_{e\nu}$ kann man mit (48.2) wie folgt angeben:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\lambda}_{e1} &= 93,833 \cdot \frac{1}{\alpha l^4}, \\ \tilde{\lambda}_{e2} &= 1384,8 \cdot \frac{1}{\alpha l^4}, \\ \tilde{\lambda}_{e3} &= 6631,7 \cdot \frac{1}{\alpha l^4}. \end{aligned} \right\} \quad (48.13)$$

Mit (48.12) können auch die Werte für $(\tilde{C}/A)_{e\nu}$ gemäß (48.9) näher bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tilde{C}}{A}\right)_{e1} &= 2,611 \cdot 10^{-3}, \\ \left(\frac{\tilde{C}}{A}\right)_{e2} &= -0,817 \cdot 10^{-3}, \\ \left(\frac{\tilde{C}}{A}\right)_{e3} &= -0,094 \cdot 10^{-3}. \end{aligned} \quad (48.14)$$

Wegen (48.8) folgt aus (48.3)

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{e\nu}(x) &= \tilde{A}_{e\nu} \sin \tilde{\kappa}_{e\nu} x + \tilde{C}_{e\nu} \delta \sin \tilde{\kappa}_{e\nu} x, \\ \tilde{W}_{e\nu}(x) &= \tilde{A}_{e\nu} \left[\sin \tilde{\kappa}_{e\nu} x + \left(\frac{\tilde{C}}{A}\right)_{e\nu} \delta \sin \tilde{\kappa}_{e\nu} x \right]. \end{aligned} \quad (48.15)$$

Das sind die nicht normierten Eigenfunktionen. Die Normierung gemäß (39.7) liefert für $\nu = 1, 2, 3$

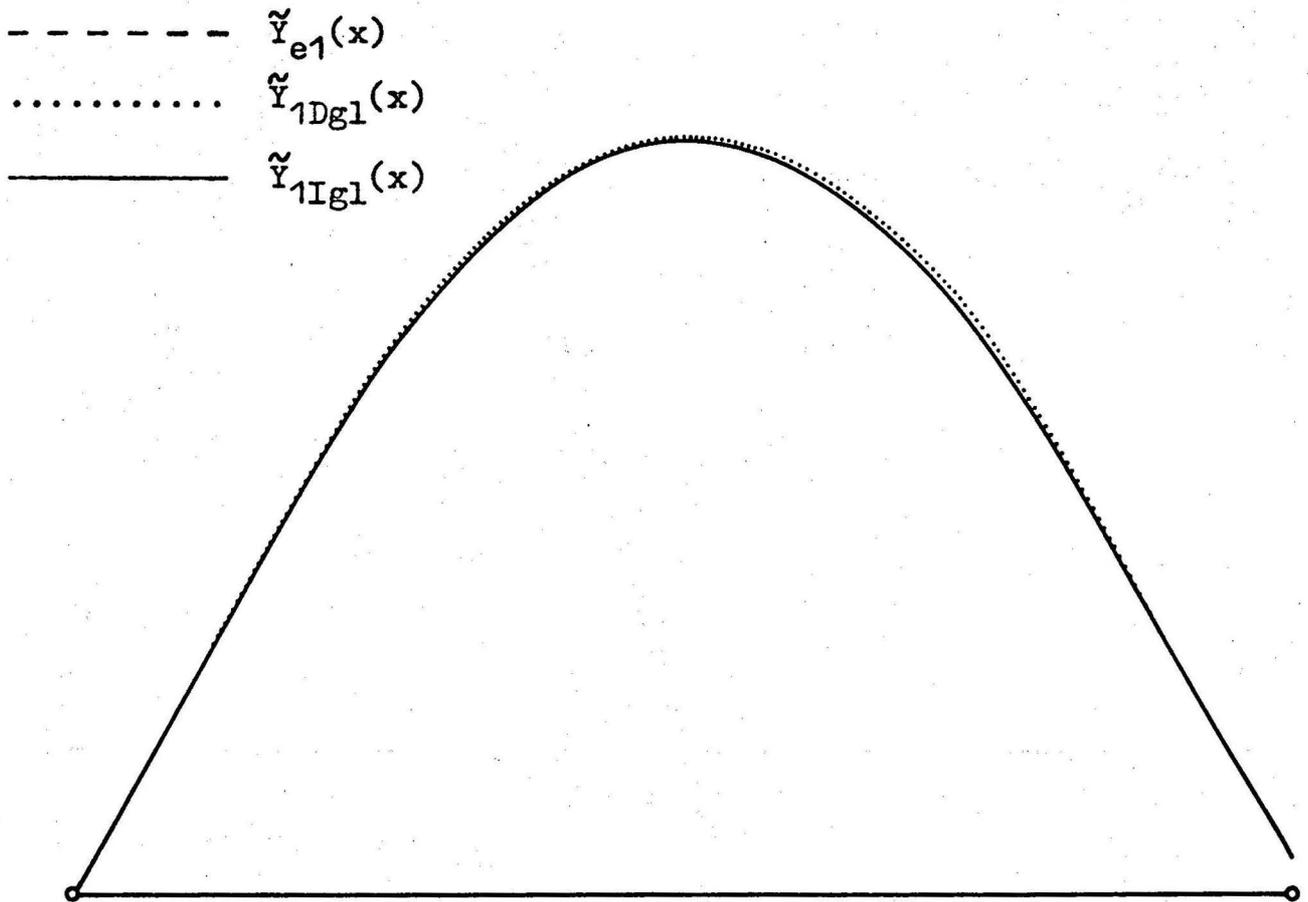
$$\begin{aligned} \tilde{A}_{e1} &= 0,986 \sqrt{\frac{2}{\mu l}}, \\ \tilde{A}_{e2} &= 0,952 \sqrt{\frac{2}{\mu l}}, \\ \tilde{A}_{e3} &= 0,958 \sqrt{\frac{2}{\mu l}}. \end{aligned} \quad (48.16)$$

Damit sind die ersten drei normierten exakten Eigenfunktionen des gestürzten Problems bekannt. Sie können gemeinsam mit den verschiedenen,

näherungsweise ermittelten Eigenfunktionen über einer $\frac{x}{l}$ - Achse aufgetragen werden. Dies ist in den Abbildungen 22 bis 24 geschehen. Außerdem sind dort die Zahlenwerte für die zugehörigen Eigenkreisfrequenzen und die Abweichungen von den ungestörten Werten angegeben. Die in den Abbildungen benutzten Abkürzungen haben die folgende Bedeutung:

- $\tilde{Y}_{e\nu}(x)$ ν -te, exakt berechnete gestörte Eigenfunktion,
- $\tilde{Y}_{\nu Dgl}(x)$ ν -te, näherungsweise über Differentialgleichung und Randbedingungen berechnete gestörte Eigenfunktion,
- $\tilde{Y}_{\nu Igl}(x)$ ν -te, näherungsweise über die Integralgleichung berechnete gestörte Eigenfunktion,

- ω_{ν} ν -te ungestörte Eigenkreisfrequenz,
- $\tilde{\omega}_{e\nu}$ ν -te, exakt berechnete gestörte Eigenkreisfrequenz,
- $\tilde{\omega}_{\nu}$ ν -te, näherungsweise berechnete gestörte Eigenkreisfrequenz.



Bemerkung:
 $\tilde{Y}_{e1}(x)$ und $\tilde{Y}_{1Igl}(x)$ fallen bei der vorliegenden Zeichengenauigkeit zusammen.

$$\omega_1 = 9,870 \frac{1}{\sqrt{\alpha l^4}},$$

$$\tilde{\omega}_{e1} = 9,687 \frac{1}{\sqrt{\alpha l^4}},$$

$$\tilde{\omega}_1 = 9,673 \frac{1}{\sqrt{\alpha l^4}}.$$

$$\frac{\tilde{\omega}_{e1} - \omega_1}{\omega_1} = -1,9 \%,$$

$$\frac{\tilde{\omega}_1 - \omega_1}{\omega_1} = -2,0 \%.$$

Abb.22: Erste Eigenfunktion des Stabes mit konstantem Querschnitt (Beispiel 1, Störung durch ein querelastisches Lager)

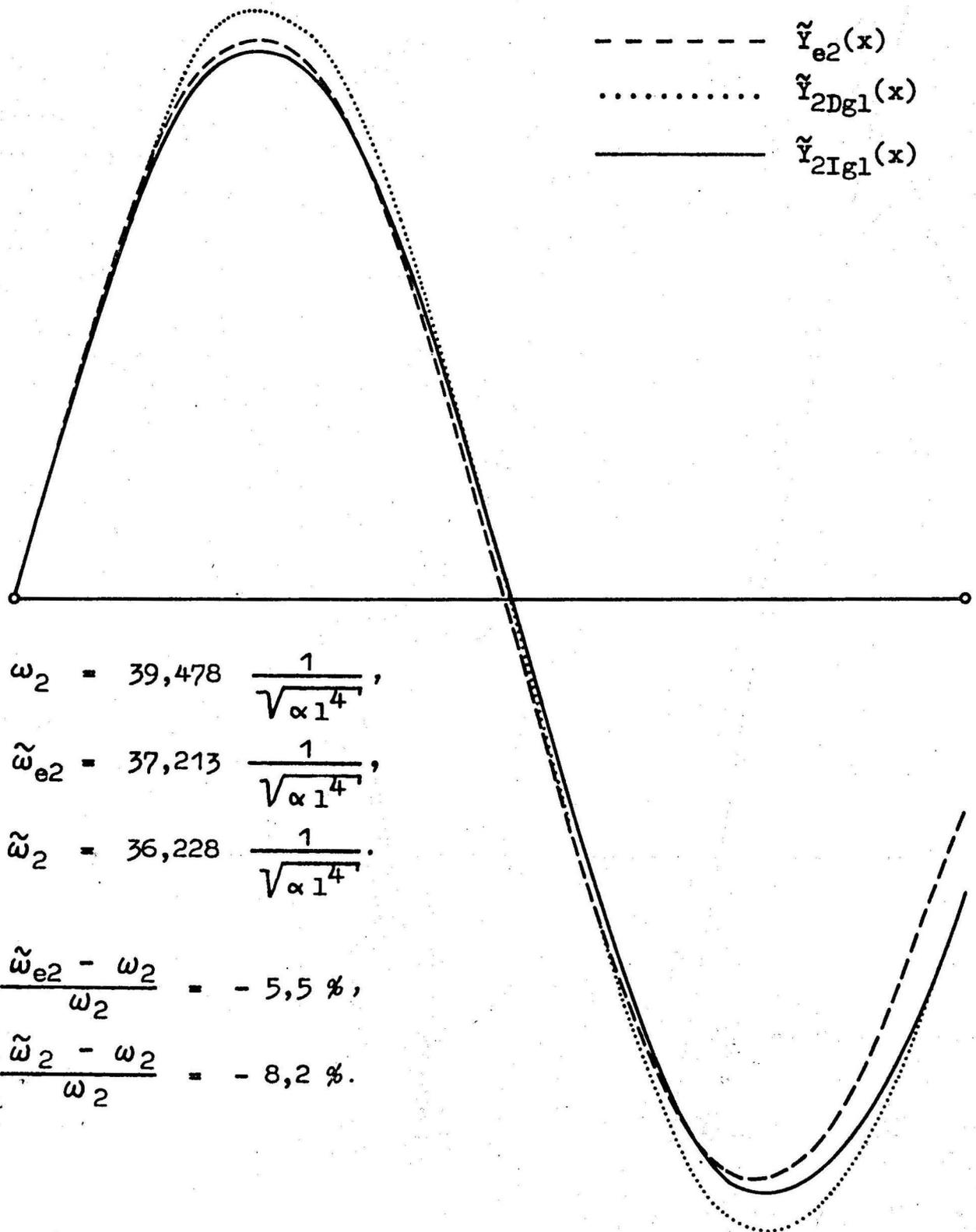
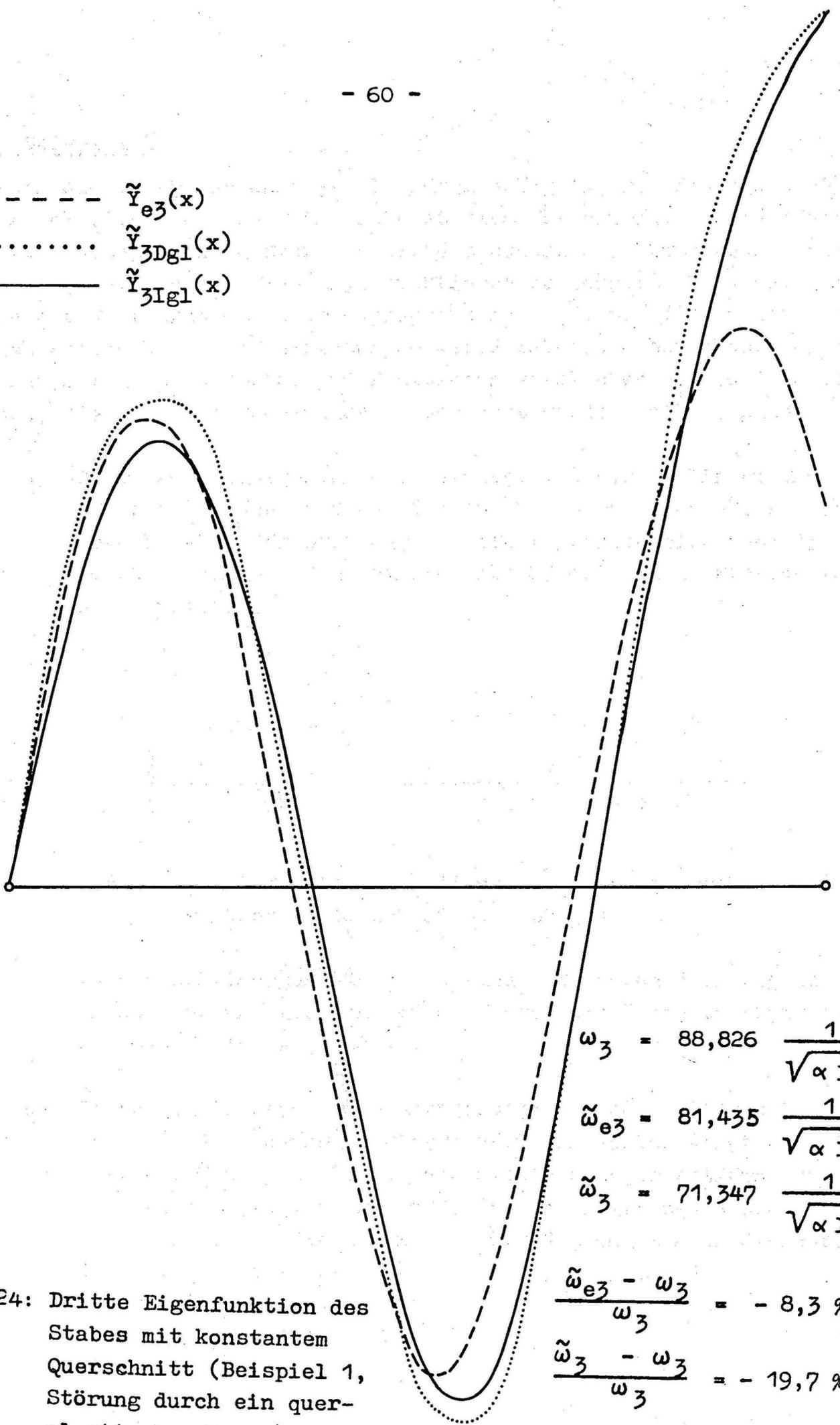


Abb.23: Zweite Eigenfunktion des Stabes mit konstantem Querschnitt
(Beispiel 1, Störung durch ein querelastisches Lager)

- - - - - $\tilde{Y}_{e3}(x)$
 $\tilde{Y}_{3Dgl}(x)$
 ————— $\tilde{Y}_{3Igl}(x)$



$$\omega_3 = 88,826 \frac{1}{\sqrt{\alpha l^4}}$$

$$\tilde{\omega}_{e3} = 81,435 \frac{1}{\sqrt{\alpha l^4}}$$

$$\tilde{\omega}_3 = 71,347 \frac{1}{\sqrt{\alpha l^4}}$$

$$\frac{\tilde{\omega}_{e3} - \omega_3}{\omega_3} = - 8,3 \%$$

$$\frac{\tilde{\omega}_3 - \omega_3}{\omega_3} = - 19,7 \%$$

Abb.24: Dritte Eigenfunktion des Stabes mit konstantem Querschnitt (Beispiel 1, Störung durch ein querelastisches Lager)

8.2 Beispiel 2

Es soll die in Abb.26 dargestellte, dreifach gelagerte Maschinenwelle aus Stahl untersucht werden. Zunächst sind für den ungestörten Fall und für verschiedene gestörte Fälle die ersten drei kritischen Drehzahlen und die zugehörigen Eigenfunktionen auf exaktem Wege (d.h. mit Hilfe der Verfahren mit Übertragungsmatrizen [2, 5, 8]) zu bestimmen. Danach sollen die Näherungslösungen gemäß Tabelle 2 berechnet und mit den zuvor genannten Werten und Funktionen verglichen werden. Die Störungen, die getrennt voneinander untersucht werden sollen, sind

- a) Störungen infolge der Kreiselwirkung einer am linken Ende der Welle angebrachten Drehträgheit $\Theta = 0,01 \text{ kp cm s}^2$, sie entspricht etwa der Drehträgheit einer Stahlscheibe von 13 cm Durchmesser und 1cm Breite. Abb.25 soll diese Störung veranschaulichen.

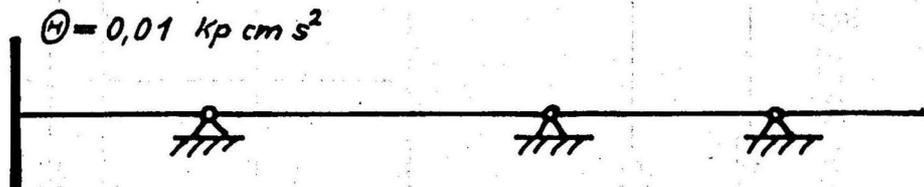
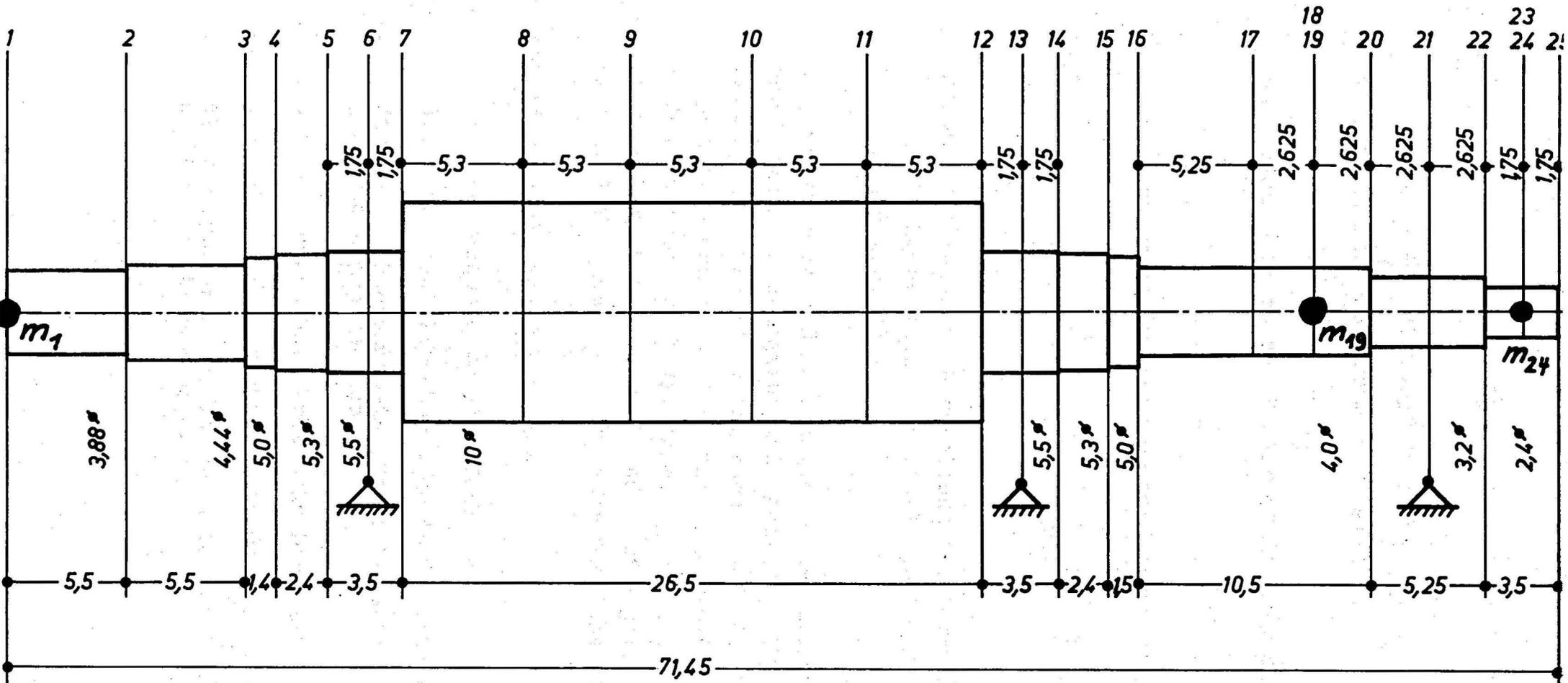


Abb.25: Vereinfachte Darstellung der Störung durch Kreiselwirkung (vgl. Abb.28 bis Abb.30)

In den Abbildungen 28 bis 30 sind die ersten drei Eigenfunktionen der ungestörten und der durch die Kreiselwirkung gestörten Welle dargestellt.

- b) Störungen infolge einer Nachgiebigkeit des mittleren Lagers von $h = 10^{-6} \text{ cm/kp}$, die etwa $1/20$ der Wellennachgiebigkeit beträgt. Wenn man nämlich das mittlere Lager entfernt und dort eine Kraft von $P = 1000 \text{ kp}$ anbringt, senkt sich die Welle an dieser Stelle um $f = 0,02176 \text{ cm}$. Man erhält daraus die Wellensteifigkeit



Punktmassen: $m_1 = 0,0010193 \frac{\text{kps}^2}{\text{cm}}$, $m_{19} = 0,0008765 \frac{\text{kps}^2}{\text{cm}}$, $m_{24} = 0,0000611 \frac{\text{kps}^2}{\text{cm}}$.

Maße in cm
M = 1:2,5

Abb.26: Dreifach gelagerte Welle (Beispiel 2)

$$c_f = \frac{P}{f} = 46000 \frac{\text{kp}}{\text{cm}} \approx 50000 \frac{\text{kp}}{\text{cm}},$$

so daß die Federkonstante des Lagers

$$c = 10^6 \frac{\text{kp}}{\text{cm}} \approx 20 c_f$$

wird. Abb.27 dient zur Veranschaulichung dieser Störung.

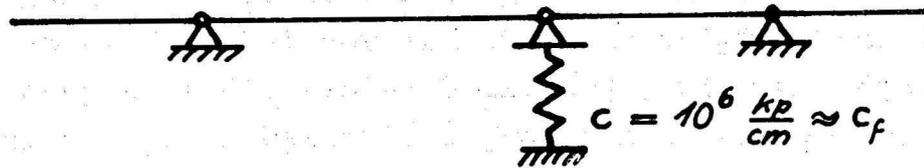


Abb.27: Vereinfachte Darstellung der Störung durch die Nachgiebigkeit des mittleren Lagers (vgl. Abb.31 und Abb.32)

Die ersten beiden Eigenfunktionen der ungestörten und der durch die Lagernachgiebigkeit gestörten Welle sind den Abbildungen 31 und 32 zu entnehmen. Auf die Darstellung der ungestörten und gestörten dritten Eigenfunktion mußte verzichtet werden, weil die näherungsweise Berechnung des gestörten Eigenwertes bereits auf ein negatives Quadrat der Eigenkreisfrequenz, also zu einem sinnlosen Ergebnis führte.

In den Abbildungen 28 bis 32 bedeuten

$Y_\nu(x)$ die ν -te ungestörte Eigenfunktion,

$\tilde{Y}_{e\nu}(x)$ die ν -te exakt berechnete gestörte Eigenfunktion,

$\tilde{Y}_\nu(x)$ die ν -te näherungsweise (nach Tabelle 2) berechnete gestörte Eigenfunktion,

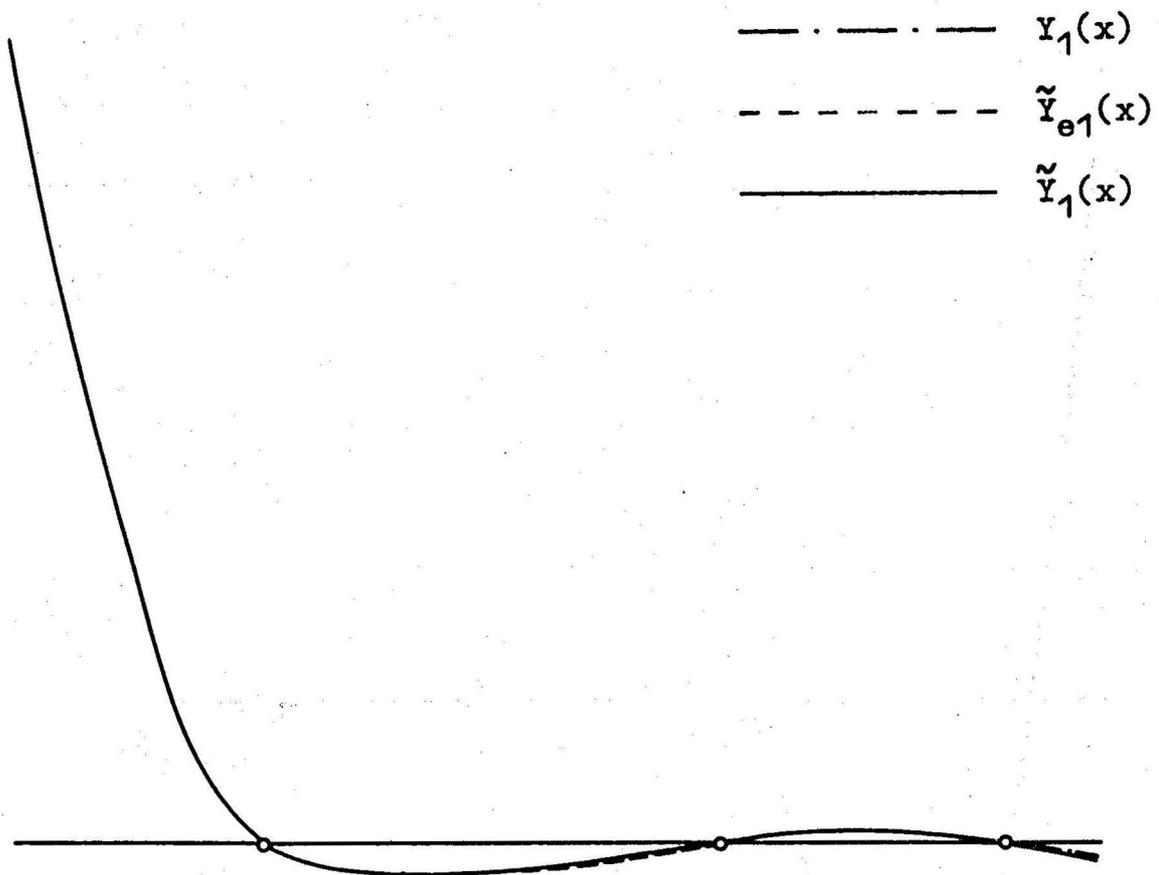
n_ν die ν -te ungestörte kritische Drehzahl,

$\tilde{n}_{e\nu}$ die ν -te exakt berechnete gestörte kritische Drehzahl,

\tilde{n}_ν die ν -te näherungsweise (nach Tabelle 2) berechnete gestörte kritische Drehzahl.

Mit einer Ausnahme wurden alle Rechnungen mit einem Digitalrechner ZUSE Z 23 durchgeführt. Die Ausnahme bildete die exakte Berechnung der durch die Lagernachgiebigkeit gestörten Welle. Die dafür erforderlichen Rechnungen wurden mit dem Digitalrechner IBM 1410 bei der AEG-Turbinenfabrik vorgenommen. Der Grund war das Auftreten von Differenzen etwa gleich großer Zahlen. Dieser Umstand ergab sich bei beiden Maschinen aus den jeweiligen Programmen. Aber das Programm für die ZUSE Z 23 war nur für Rechnungen mit einer Wortlänge von 9 Ziffern vorgesehen - im Gegensatz zu 15 Ziffern bei der IBM 1410. Es zeigte sich, daß bei der Differenzbildung etwa die ersten 8 Ziffern verloren gingen, daß also die Rechnung mit einer wesentlich größeren Wortlänge erforderlich war.

Außerdem stimmten die Programme in den ihnen zu Grunde gelegten Berechnungsverfahren nicht überein. Während das Programm der ZUSE Z 23 die kontinuierliche Massenbelegung eines Wellenstückes weitgehend berücksichtigte, sah das für die IBM 1410 vorgesehene Programm nur eine Aufteilung der Welle in Punktmassen mit dazwischen liegenden nur elastischen Wellenstücken vor.- Für den ungestörten Fall wurden die auf beiden Maschinen erhaltenen Ergebnisse verglichen. Die Abweichungen bei den kritischen Drehzahlen und den Eigenfunktionswerten lagen bei etwa 1%. Die bei der IBM-Rechnung erhaltenen Werte für die kritischen Drehzahlen bei elastischem Lager wurden diesen Abweichungen entsprechend umgerechnet. Die auf den verschiedenen Wegen erhaltenen ungestörten Eigenfunktionen stimmten im Rahmen der Zeichengenauigkeit überein, so daß sicher angenommen werden kann, daß die gestörten Funktionen in den Abbildungen 31 und 32 richtig wiedergegeben sind.



$$n_1 = 44\,799 \text{ U/min.}$$

$$\tilde{n}_{e1} = 46\,197 \text{ U/min.}$$

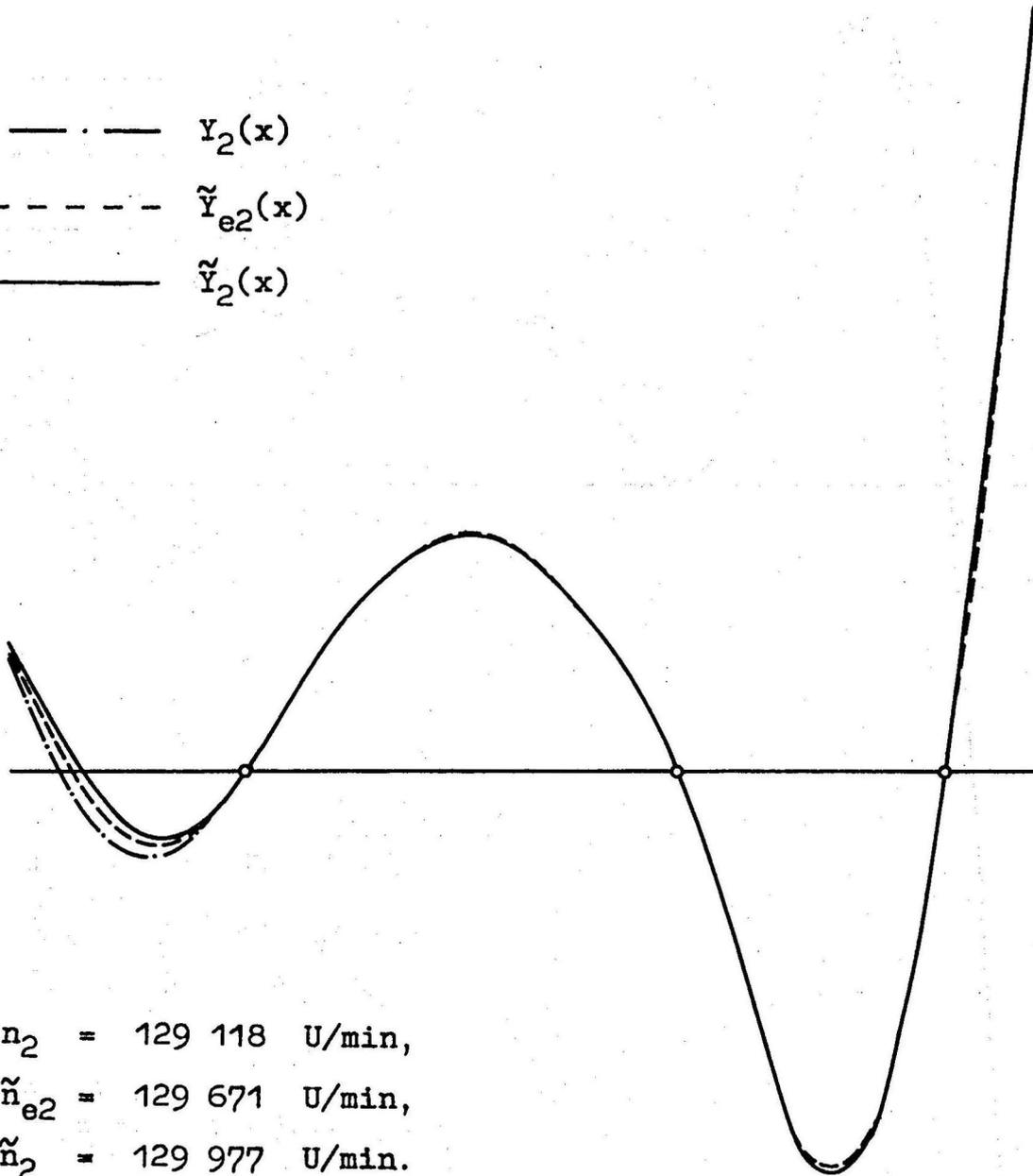
$$\tilde{n}_1 = 46\,186 \text{ U/min.}$$

$$\frac{\tilde{n}_{e1} - n_1}{n_1} = 3,12 \%$$

$$\frac{\tilde{n}_1 - n_1}{n_1} = 3,10 \%$$

Abb.28: Erste Eigenfunktion der dreifach gelagerten Welle
(Beispiel 2, Störung durch Kreiselwirkung)

— · — · — $Y_2(x)$
- - - - - $\tilde{Y}_{e2}(x)$
————— $\tilde{Y}_2(x)$

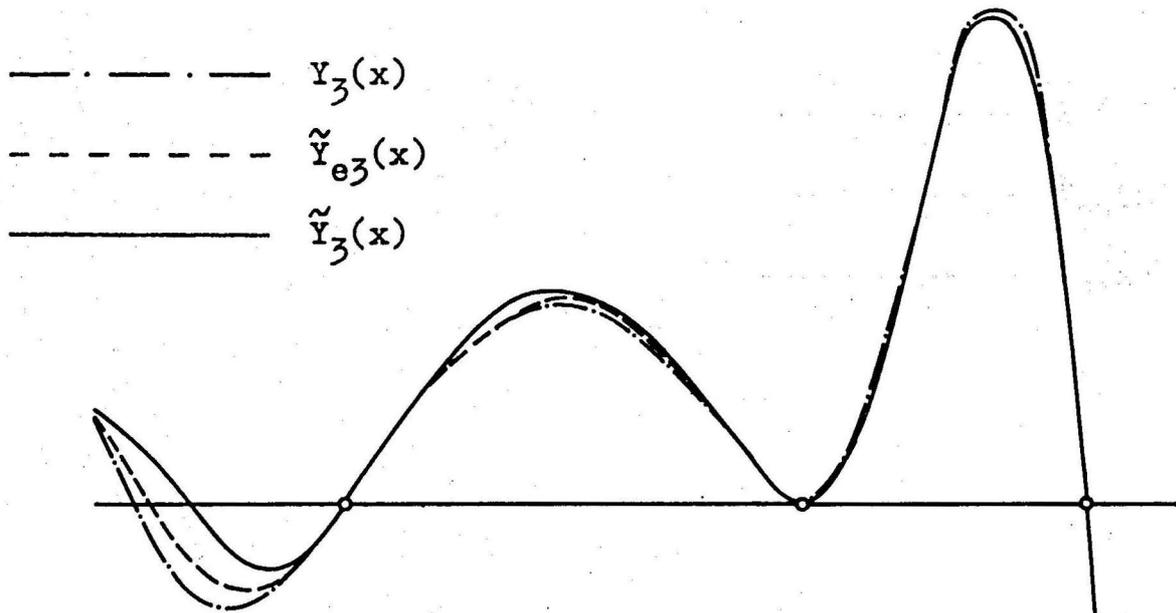


$n_2 = 129\ 118\ \text{U/min},$
 $\tilde{n}_{e2} = 129\ 671\ \text{U/min},$
 $\tilde{n}_2 = 129\ 977\ \text{U/min}.$

$$\frac{\tilde{n}_{e2} - n_2}{n_2} = 0,428 \%$$

$$\frac{\tilde{n}_2 - n_2}{n_2} = 0,665 \%$$

Abb.29: Zweite Eigenfunktion der dreifach gelagerten Welle
(Beispiel 2, Störung durch Kreiselwirkung)



$$n_3 = 161\,503 \text{ U/min,}$$

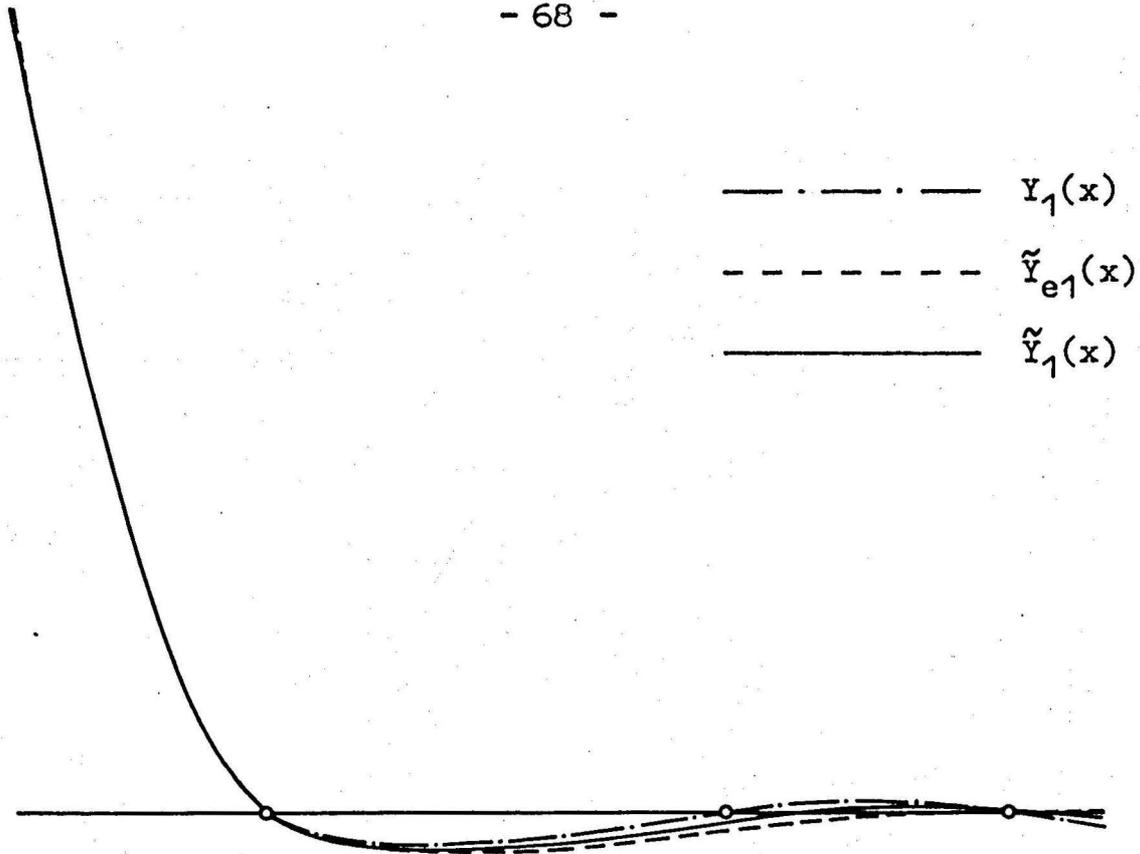
$$\tilde{n}_{e3} = 162\,031 \text{ U/min,}$$

$$\tilde{n}_3 = 162\,529 \text{ U/min.}$$

$$\frac{\tilde{n}_{e3} - n_3}{n_3} = 0,326 \%,$$

$$\frac{\tilde{n}_3 - n_3}{n_3} = 0,635 \%.$$

Abb.30: Dritte Eigenfunktion der dreifach gelagerten Welle (Beispiel 2, Störung durch Kreiselwirkung)



$$n_1 = 44\,799 \text{ U/min,}$$

$$\tilde{n}_{e1} = 44\,333 \text{ U/min,}$$

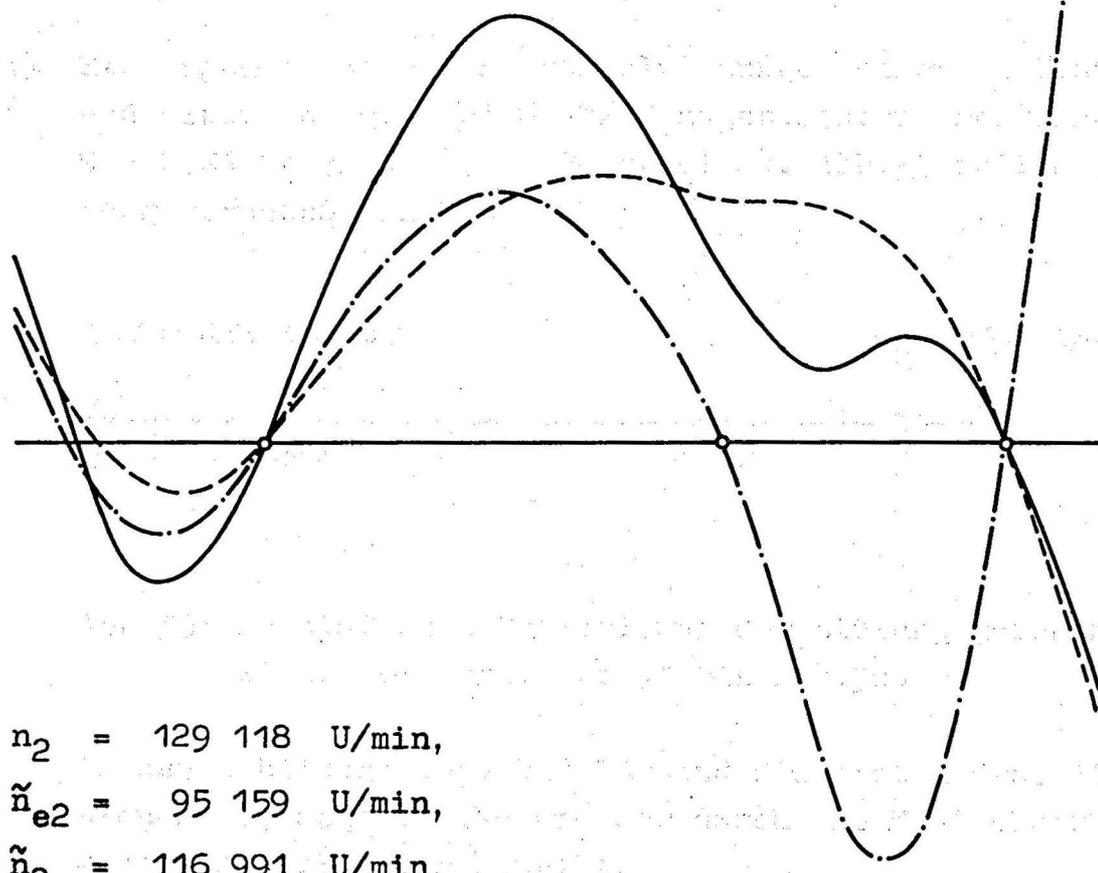
$$\tilde{n}_1 = 44\,381 \text{ U/min.}$$

$$\frac{\tilde{n}_{e1} - n_1}{n_1} = -1,04 \%,$$

$$\frac{\tilde{n}_1 - n_1}{n_1} = -0,93 \%.$$

Abb.31: Erste Eigenfunktion der dreifach gelagerten Welle
(Beispiel 2, Störung durch elastisches Lager)

— · — · — $Y_2(x)$
- - - - - $\tilde{Y}_{e2}(x)$
————— $\tilde{Y}_2(x)$



$n_2 = 129\ 118\ \text{U/min,}$
 $\tilde{n}_{e2} = 95\ 159\ \text{U/min,}$
 $\tilde{n}_2 = 116\ 991\ \text{U/min.}$

$$\frac{\tilde{n}_{e2} - n_2}{n_2} = - 26,3 \%$$

$$\frac{\tilde{n}_2 - n_2}{n_2} = - 9,39 \%$$

Abb.32: Zweite Eigenfunktion der dreifach gelagerten Welle
(Beispiel 2, Störung durch elastisches Lager)

8.3 Beispiel 3

Es soll die in Abb. 35 dargestellte, zweifach gelagerte Maschinenwelle aus Stahl genauso untersucht werden wie im vorangegangenen Beispiel. Die Welle stimmt mit der in Beispiel 2 untersuchten Welle überein, wenn man dort das rechte Lager entfernt und das diesem Lager benachbarte Wellenstück von $3,2 \text{ cm}^{\phi}$ entfernt. Die Störungen, die wieder getrennt voneinander betrachtet werden sollen, sind

- a) Störungen infolge von Kreiselwirkungen einer am linken Ende und einer an der Stelle 18/19 angebrachten Drehträgheit $\Theta = 0,01 \text{ kp cm s}^2$ (vgl. Beispiel 2). Abb. 33 soll diese Störung veranschaulichen.

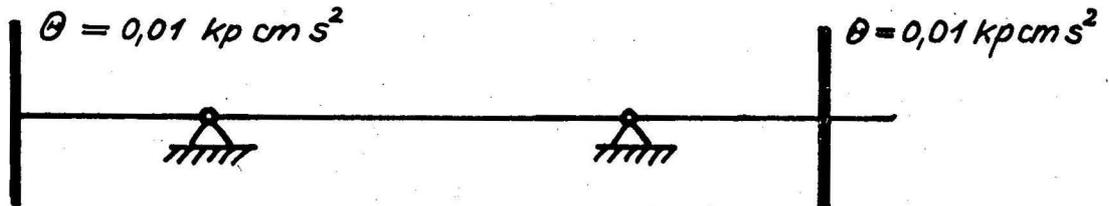


Abb. 33: Vereinfachte Darstellung der Störung durch Kreiselwirkungen (vgl. Abb. 36 bis Abb. 38)

In den Abbildungen 36 bis 38 sind die ersten drei Eigenfunktionen der ungestörten und der durch die Kreiselwirkungen gestörten Welle dargestellt.

- b) Störungen infolge von Nachgiebigkeiten beider Lager von jeweils $h = 10^{-6} \text{ cm/kp}$ (vgl. Beispiel 2). Zur Veranschaulichung dieser Störungen dient Abb. 38.

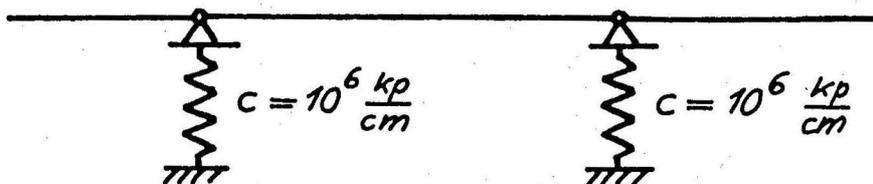
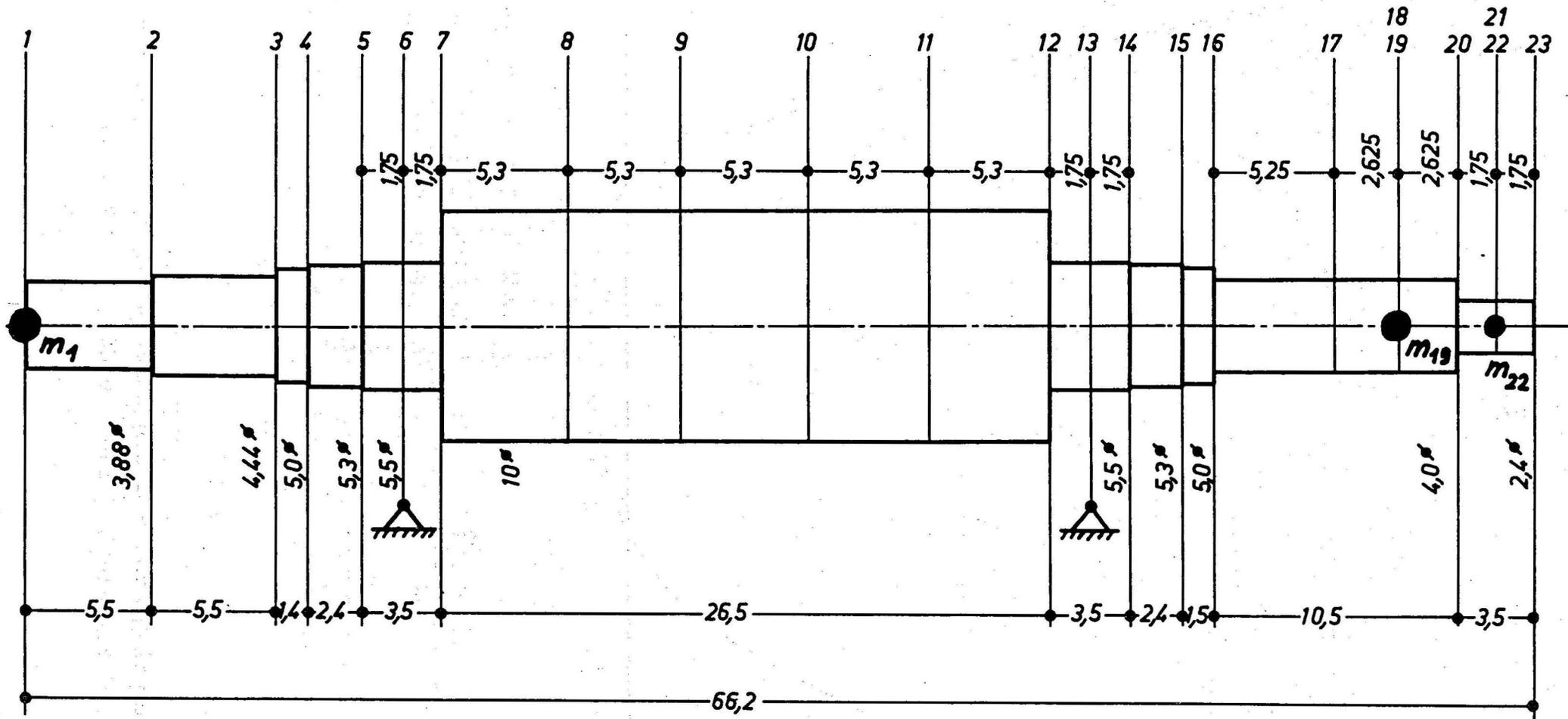


Abb. 34: Vereinfachte Darstellung der Störung durch elastische Lager (vgl. Abb. 39 und Abb. 40)

Die ersten beiden Eigenfunktionen der ungestörten und der durch die Lagernachgiebigkeiten gestörten Welle sind den Abbildungen 39 und 40 zu entnehmen. Auf die Darstellung der ungestörten und gestörten dritten Eigenfunktion mußte verzichtet werden, weil die näherungsweise Berechnung des gestörten Eigenwertes wieder auf ein negatives Quadrat der Eigenkreisfrequenz, also zu einem sinnlosen Ergebnis führte.

Die in den Abbildungen 36 bis 40 benutzten Bezeichnungen haben die gleiche Bedeutung wie in Beispiel 2 (vgl. Seite 63).

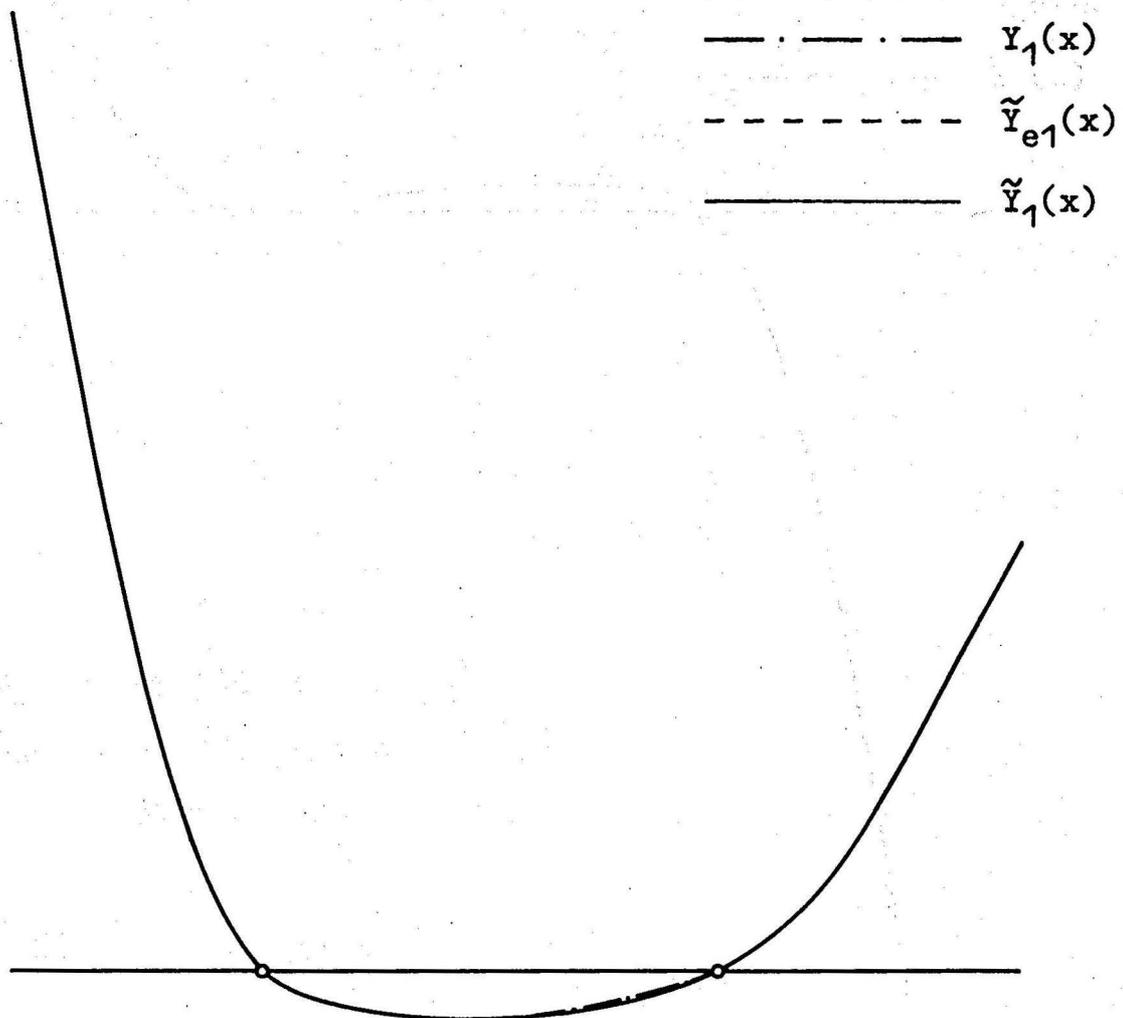
Zu den Rechenverfahren und den benutzten Digitalrechnern sind ebenfalls die gleichen Bemerkungen zu machen wie im vorangegangenen Beispiel.



Punktmassen: $m_1 = 0,0010193 \frac{\text{Kps}^2}{\text{cm}}$, $m_{19} = 0,0008765 \frac{\text{Kps}^2}{\text{cm}}$, $m_{22} = 0,0000611 \frac{\text{Kps}^2}{\text{cm}}$.

Maße in cm
 $M = 1:2,5$

Abb.35: Zweifach gelagerte Welle (Beispiel 3)



$$n_1 = 44\ 343 \text{ U/min,}$$

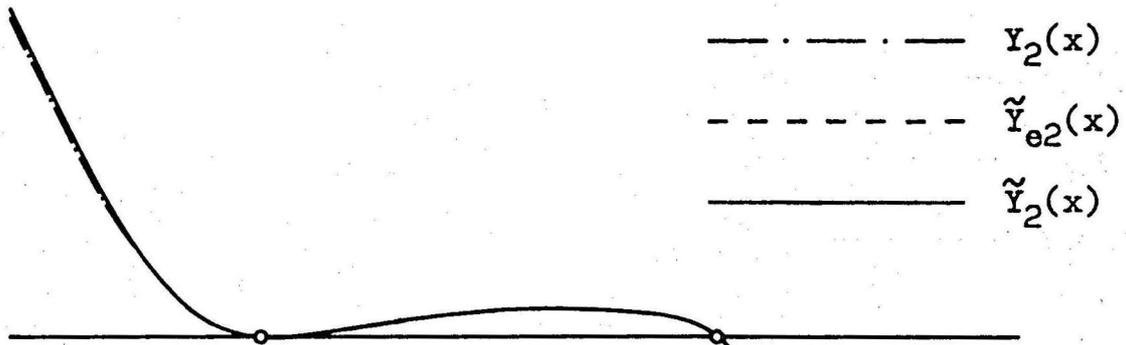
$$\tilde{n}_{e1} = 45\ 705 \text{ U/min,}$$

$$\tilde{n}_1 = 45\ 692 \text{ U/min.}$$

$$\frac{\tilde{n}_{e1} - n_1}{n_1} = 3,07 \%,$$

$$\frac{\tilde{n}_1 - n_1}{n_1} = 3,04 \%.$$

Abb.36: Erste Eigenfunktion der zweifach gelagerten Welle
(Beispiel 3, Störung durch Kreiselwirkungen)



$$n_2 = 49\,479 \text{ U/min,}$$

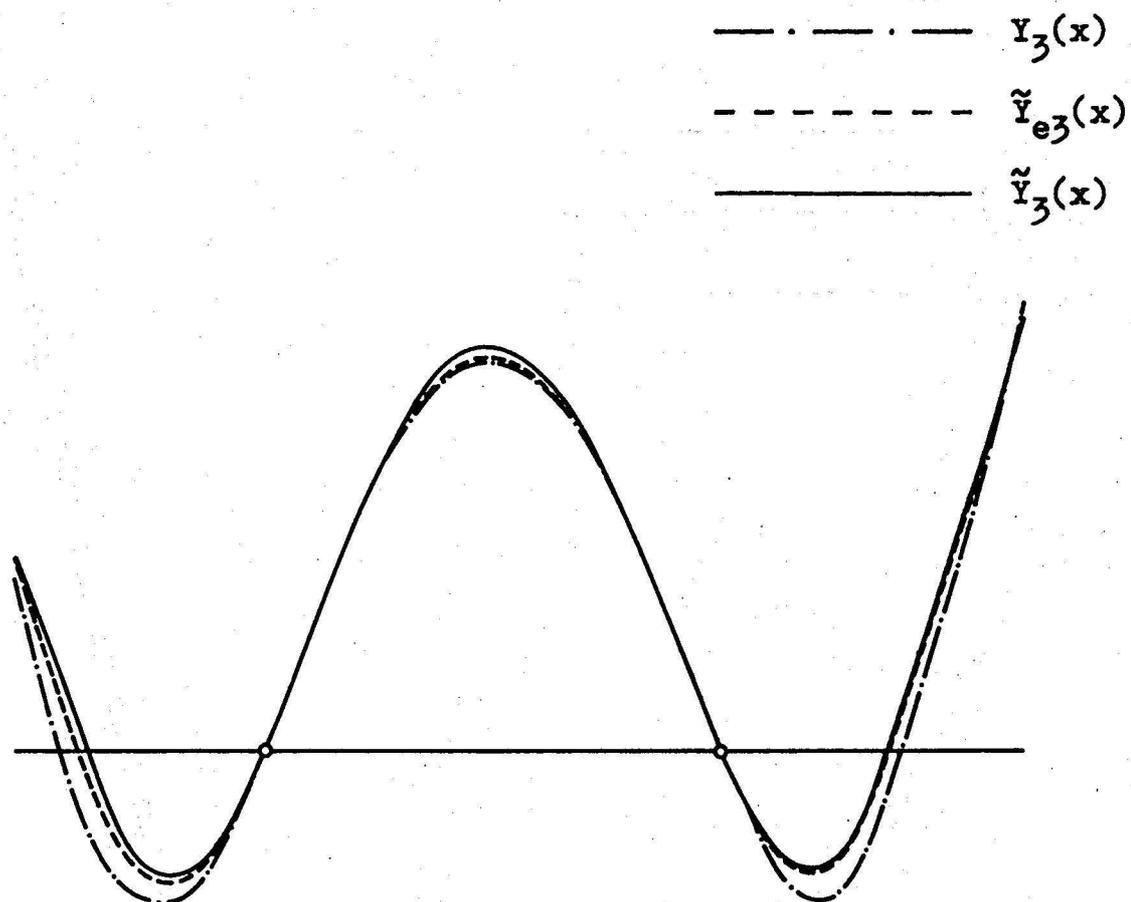
$$\tilde{n}_{e2} = 51\,405 \text{ U/min,}$$

$$\tilde{n}_2 = 51\,338 \text{ U/min.}$$

$$\frac{\tilde{n}_{e2} - n_2}{n_2} = 3,89 \%,$$

$$\frac{\tilde{n}_2 - n_2}{n_2} = 3,76 \%.$$

Abb.37: Zweite Eigenfunktion der zweifach gelagerten Welle (Beispiel 3, Störung durch Kreiselwirkungen)



$$n_3 = 140\,397 \text{ U/min,}$$

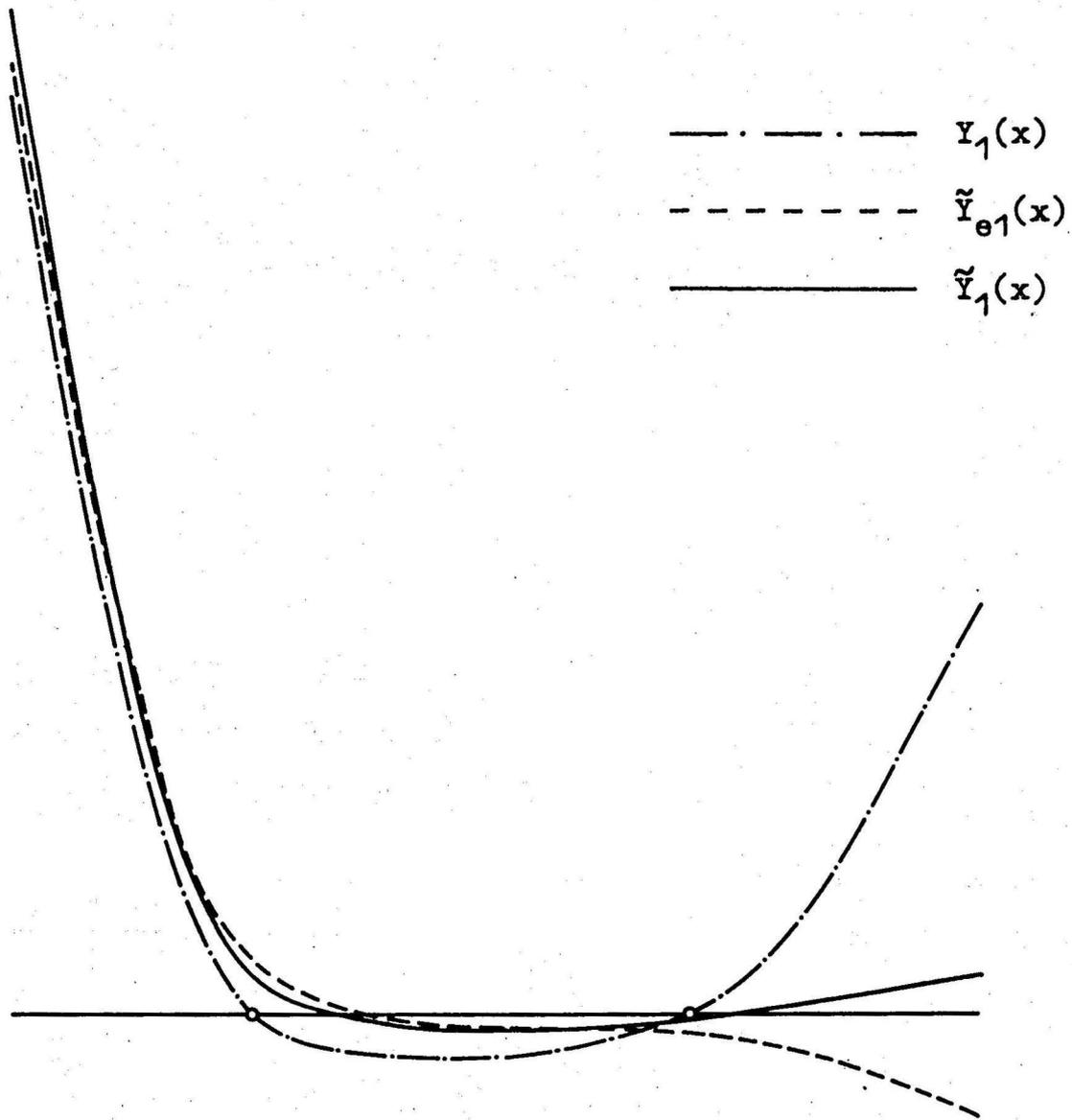
$$\tilde{n}_{e3} = 142\,580 \text{ U/min,}$$

$$\tilde{n}_3 = 143\,408 \text{ U/min.}$$

$$\frac{\tilde{n}_{e3} - n_3}{n_3} = 1,56 \%,$$

$$\frac{\tilde{n}_3 - n_3}{n_3} = 2,15 \%.$$

Abb. 38: Dritte Eigenfunktion der zweifach gelagerten Welle
(Beispiel 3, Störung durch Kreiselwirkungen)



$$n_1 = 44\,343 \text{ U/min,}$$

$$\tilde{n}_{e1} = 42\,541 \text{ U/min,}$$

$$\tilde{n}_1 = 43\,136 \text{ U/min.}$$

$$\frac{\tilde{n}_{e1} - n_1}{n_1} = -4,06 \%,$$

$$\frac{\tilde{n}_1 - n_1}{n_1} = -2,72 \%.$$

Abb.39: Erste Eigenfunktion der zweifach gelagerten Welle
(Beispiel 3, Störung durch elastische Lager)

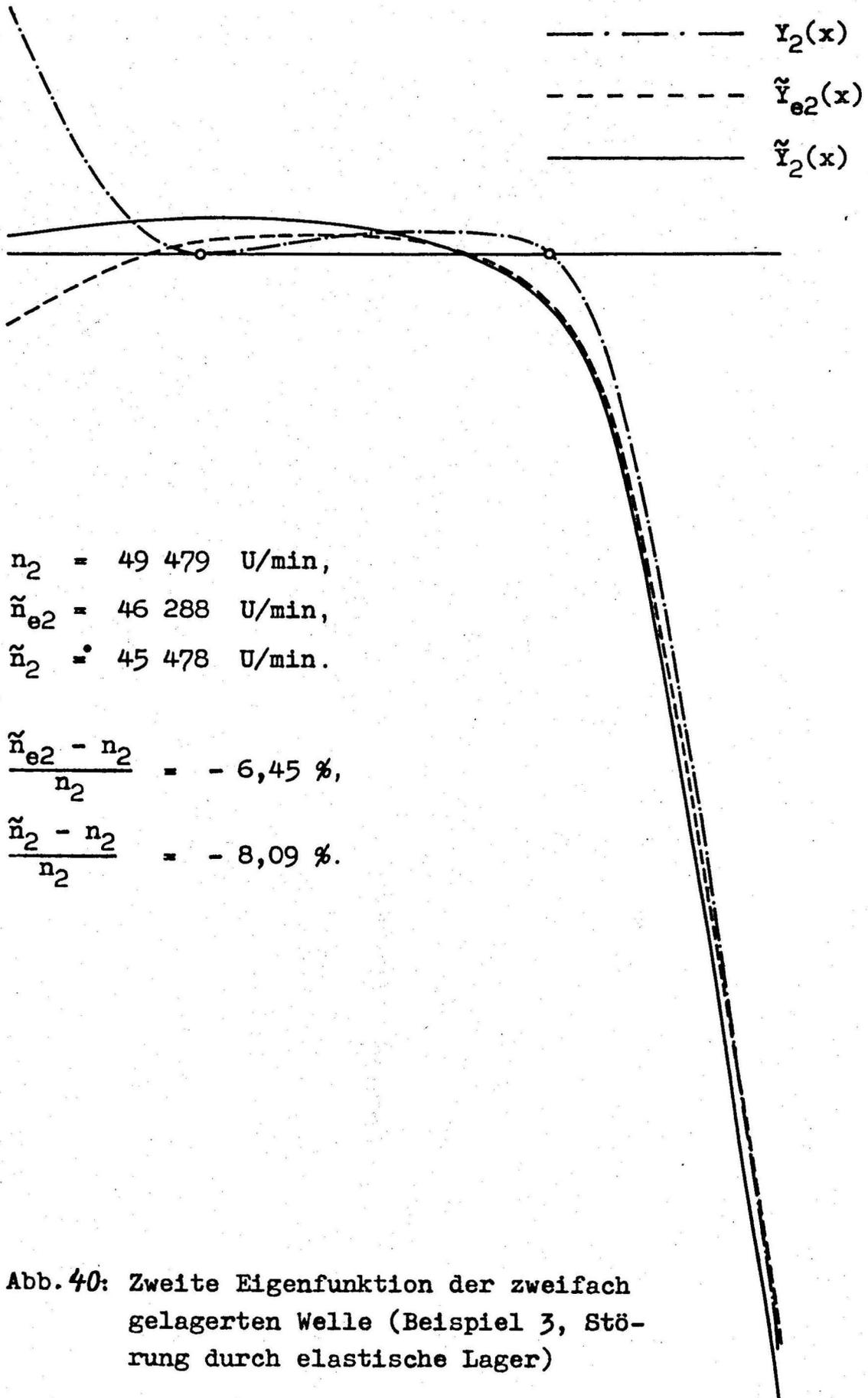


Abb. 40: Zweite Eigenfunktion der zweifach gelagerten Welle (Beispiel 3, Störung durch elastische Lager)

